Math: P. 150

Matheseis: p. 272.

Anfangsgründe der höhern Geometrie

Zum Gebrauch

der

Vorlesungen

entworfen

von

Johann Carl Fischer
der Philosophie ausserord. Professor zu Jena.

Nebst 6. Kupfertafeln.

Jena,
in der Crökerschen Buchhandlung
1796.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Vorrede.

Eine Wissenschaft, welche unserm Geiste *so vielen* Stoff zur Entdeckung neuer Wahrheiten darbietet, und für das menschliche Geschlecht von dem größten Nutzen ist, muß unstreitig eine von den wichtigsten und reizensten Wissenschaften seyn. Schon derjenige, welcher sich nur mit den ersten Gründen der Elementargeometrie bekannt gemacht hat, wird sich viele nützliche und wichtige unbezweifelte Wahrheiten gesammlet haben, welche er zum Wohl der Menschen anwenden kann. Tritt er aber in das

Gebiet der höhern Geometrie, so eröfnet sich ihm ein unübersehbares Gefilde zu neuen wichtigen Untersuchungen. Er unternimmt es, die Natur und Größe der krummen Linien, krummen Flächen und Körper, welche unzählig sind, zu bestimmen. Er findet in manchen Fällen krumme Linien, welche mit geraden, krummlinichte Flächen, welche mit geradlinichten und von krummen Flächen begränzte Körper, welche mit Körpern von ebenen Flächen commensurabel sind; unumstößliche Beweise, daß krumme Linien mit geraden, und krummlinichte Flächen mit geradlinichten commensurabel seyn können, ob dies gleich von manchen großen Philosophen völlig abgeläugnet wird, dessen Kenntnisse in der Mathematik aber sich bis dahin nicht erstrecken. Ja es scheint mir

noch

noch sehr wahrscheinlich, daß selbst die Quadratur des Kreises möglich sey; denn der Beweis, welchen Sturm in seiner matheſi juvenili propos. 43. von der Unmöglichkeit der Quadratur des Kreises gegeben hat, ist sehr vielen Zweifeln unterworfen.

Es würde sehr unnöthig seyn, umständlich von dem Nutzen der höhern Geometrie zu reden. — Sind nicht die Laufbahnen der ungeheuren schimmerden Weltkörper krumme Bahnen, anderer krummlichter Bewegungen, welche in andern Theilen der angewandten Mathematik vorkommen, nicht zu gedenken? — Ja in der höhern Geometrie findet man die beste Gelegenheit, sich in der analytischen Rechnungsart am mehresten zu üben, ohne welche auch nicht einmal die gemeine Mathematik gründlich behandelt werden kann.

Ich

Vorrede.

Ich habe mich bestrebet, die hieher gehörigen Untersuchungen so viel als möglich gründlich und deutlich vorzutragen, und beständig den kürzesten Weg zu wählen, um die verlangten Resultate zu erhalten. Ich schmeichle mir wenigstens angehenden Studirenden hierinn einen solchen Unterricht ertheilen zu können, daß sie die höhere Geometrie gründlich erlernen und Stoff genug zu weiterer Erforschung geometrischer Wahrheiten erhalten, und dies war eben die Absicht, welche ich mir bey Abfassung dieser Schrift vor Augen setzte.

Jena,
im Februar 1796.

Johann Carl Fischer.

Inhalt

Inhalt
Anfangsgründe
der
höhern Geometrie.

Erstes Kapitel.
Von den krummen Linien überhaupt S. 1 — 59.

Zweytes Kapitel.
Von den Tangenten, Subtangenten, Normalen, Subnormalen und Diametern der Kegelschnitte S. 59 — 114.

Drittes Kapitel.
Von den Linien der zweyten Ordnung und derselben Construction S. 115 — 136.

Viertes Kapitel.
Von den trigonometrischen Größen S. 136 — 144.

Fünftes Kapitel.
Von den geometrischen Oertern und von der Auflösung einiger geometrischen Aufgaben S. 145 — 158.

Sechstes Kapitel.
Von der Anwendung der Differenzialrechnung in Bestimmung der Tangenten, Subtangenten, Normalen, Subnormalen der algebraischen Linien für rechtwinklichte Coordinaten S. 158 — 179.

Siebentes Kapitel.
Von Erfindung der Tangenten, Subtangenten, Normalen, Subnormalen mit schiefwinklichten Coordinaten durch Hülfe der Differenzialrechnung S. 179 — 188.

Achtes

Achtes Kapitel.

Von den merkwürdigsten Punkten der krummen Linien, mit rechtwinklichten Coordinaten S. 188–214.

Neuntes Kapitel.

Vom Krümmungskreise und den Evoluten S. 214–233.

Zehntes Kapitel.

Von der Rektifikation der krummen Linien S. 233–249.

Eilftes Kapitel.

Von der Quadratur der krummen Linien S. 249–269.

Zwölftes Kapitel.

Von der Cubatur der krummen Linien S. 270–285.

Dreyzehntes Kapitel.

Von den Logarithmen und der logarithmischen Linie S. 285–313.

Vierzehntes Kapitel.

Von den trigonometrischen Differenzialen und Integralen und von der Berechnung der trigonometrischen Linien S. 314–349.

Funfzehntes Kapitel.

Von der Radlinie oder Cykloide S. 349–376.

Sechzehntes Kapitel.

Von den krummen Linien, deren Ordinaten aus einem Punkte gehen S. 377–403.

Siebenzehntes Kapitel.

Von den Flächen u. doppelt gekrümmten Linien S. 404–428.

Achtzehntes Kapitel.

Von solchen Linien, welche einander berühren S. 428–440.

Neunzehntes Kapitel.

Von der Variationsrechnung und einigen Anwendungen auf die Geometrie S. 440–464.

An=

Anfangsgründe der höhern Geometrie.

Erstes Kapitel.

Von den krummen Linien überhaupt.

§. 1.

Erklärung.

Die höhere Geometrie ist eine Wissenschaft, welche nicht allein von der Natur der krummen Linien, Flächen und Körper, sondern auch von deren Größen Unterricht giebt, in wie fern sie unter dem Calcül gebracht werden können.

§. 2.

Erklärung.

Eine krumme Linie heißt regulär, wenn sich ein allgemeines Gesetz angeben läßt, nach welchem

der Gang der krummen Linie bestimmt, folglich darnach gezeichnet werden kann, irregulär aber heißt sie, wenn es unmöglich ist ein solches allgemeines Gesetz zu finden. Ein Beyspiel von der letztern giebt ein jeder aus freyer Hand gemachte Zug. Das Gesetz, nach welchem der Gang der krummen Linie bestimmt wird, ist eine unbestimmte Gleichung, in welcher zwey veränderliche Größen x und y befindlich sind.

§. 3.

Erklärung.

Es sey cdefg (Fig. 1.) eine reguläre krumme Linie, und durch den willkührlich gewählten Punkt a ziehe man die beyden unbestimmten Linien ab, am, welche sich unter dem beliebigen Winkel a schneiden (gewöhnlich pflegt man einen rechten zu wählen, wenn nicht andere Ursachen das Gegentheil erfordern); hierauf nehme man in der krummen Linie die Punkte d, e, f, g u. f. nach Belieben an, und ziehe durch selbige die Linien dn, eo, fp, gq u. f. mit am und dh, ei, fk, gl u. f. mit ab parallel so daß also ad, ac, af, ag u. f. lauter Parallelogramme sind, mithin auch hd = an, ie = ao, kf = ap, ha = dn, ia = eo, ak = pf u. f. so nennt man die Theile an, ao, ap, aq u. f. Abscissen und ah, ai, ah, al u. f. die dazu gehörigen Applikaten oder Ordinaten. Aus diesem Grunde heißt auch die Linie ab die Abscissenlinie oder die Axe der Abscissen, am die Applikaten, oder Ordinatenlinie oder die Axe der Ordinaten, und der willkührlich gewählte Punkt a der Ursprung oder

der

der Anfangspunkt der Abscissen. Ausserdem nennt man eine Abscisse mit der dazu gehörigen Applikate oder Ordinate wie an und nd, ao und oe u. s. Coordinaten, und daher den Winkel a den Coordinatenwinkel. Man sieht hieraus, daß die Ordinaten größer oder kleiner werden müssen, wenn die dazu gehörigen Abscissen andere und andere Werthe bekommen. Deswegen sind die Abscissen und die dazu gehörigen Ordinaten veränderliche Größen. Man pflegt die Abscissen durch den Buchstaben x und die dazu gehörigen Applikaten durch den Buchstaben y auszudrucken.

Anmerk. Gewöhnlich wird die Applikatenlinie am nicht gezeichnet, weil die Lage derselben durch die Applikaten nd, oe u. s. bestimmt wird, wenn der Coordinaten Winkel $a = dnb$ gegeben ist.

§. 4.

Aufgabe.

Eine Gleichung für die Kreislinie zu finden.

1. Auflösung.

Nimmt man den Anfangspunkt der Abscissen in a (Fig. 2.) und ad zur Abscisse, so ist de die dazu gehörige Ordinate, und man hat $ad : de = de : db$ (§. 187. Geom.). Man setze nun $ad = x$ und $de = y$, und $ac = r$, so ist $db = ab - ad = 2r - x$, folglich

$x : y = y : 2r - x$, und daher

$(2r - x)x = y^2$ oder $2rx - x^2 = y^2$, und

$y = \pm V(2rx - x^2)$ d. h.

zu einer jeden Abscisse x gehören allemal zwey Ordinaten, welche zwar einander gleich aber entgegengesetzet sind, wie auch aus der Figur erhellet, indem df = de.

2. Auflösung.

Nimmt man den Ursprung der Abscissen in dem Mittelpunkte c, so sey cd = x eine Abscisse mithin de = y die dazu gehörige Ordinate. Nun hat man in dem rechtwinklichten Dreyecke ced

$$ce^2 = cd^2 + de^2 \text{ oder}$$
$$r^2 = x^2 + y^2 \text{ also}$$
$$y^2 = r^2 - x^2 \text{ und}$$
$$y = \pm\sqrt{(r^2 - x^2)}$$

mithin giebt x abermals zwey Werthe für y, nemlich einen positiven und einen negativen.

§. 5.

Zusatz.

Wenn in der Gleichung $2rx - x^2 = y^2$ die Größe $y = o$ wird, so erhält man auch $2rx - x^2 = o$ also $2rx = x^2$ und $2r = x$ d. h. wenn die Applikate verschwindet, so wird die Abscisse dem Durchmesser des Kreises gleich, und die Kreislinie muß die Abscissenlinie schneiden. Wird endlich auch $x = o$, so verschwindet auch y oder wird o, also muß noch einmal die Kreislinie die Abscissenlinie schneiden, wie dies auch völlig der Natur des Kreises gemäs, und schon hinlänglich aus der Elementargeometrie bekannt ist.

§. 6.

Erklärung.

Die krumme Linie lcmdg (Fig. 3.), welche diese Eigenschaft besitzet, daß alle Punkte derselben von einem Punkte f und einer geraden Linie kn gleich weit entfernet sind, heißt eine **Parabel**. Es wird also mf = ma, fo = oe, fg = gn u. f. seyn müssen. Der feste Punkt f heißt hier der **Fokus** oder **Brennpunkt**, die gerade Linie kn die **Abscissenlinie**, die Linie ba, welche durch den Brennpunkt f gehet, und auf der Abscissenlinie senkrecht steht, die **Axe der Parabel**, und der Punkt m *der Parabel*, durch welche die Axe gehet, der **Scheitel**. Ferner nennt man die gerade Linie dc, welche auf der Axe durch den Brennpunkt senkrecht steht, den **Parameter**, und die geraden Linien fo, fg, fi, fl u. f. welche aus dem Brennpunkte nach dem Umfang der Parabel gezogen werden, die **Radii Vektoren oder kurz Vektoren.**

§. 7.

Zusatz.

Aus dieser Erklärung der Parabel erhellet es leicht, wie man Punkte in selbiger bestimmen könne, um sodann die Parabel durch selbige hindurchzuführen, wenn der Brennpunkt und die Lage der Abscissenlinie gegeben sind. Man ziehe nemlich durch den Brennpunkt f (Fig. 4.) die Axe ba auf die Abscissenlinie un senkrecht, theile fa in m in zwey gleiche Theile, so ist m der Scheitel der Parabel. Hierauf ziehe man durch Punkte x, y, z u. s.

der Axe die geraden Linien oi, dc, rſ, gv u.
mit der Abſciſſenlinie parallel, und faſſe mittelſt d
Zirkels nach und nach die Längen xa, fa, ya, za u.
und beſchreibe damit aus dem Brennpunkte Krei
bogen, welche nach und nach die gezogenen Linie
oi, dc, rſ, gv u. ſ. in den Punkten i, o, c,
ſ, r u. ſ. ſchneiden werden. Durch dieſe beſtimm
ten Punkte zieht man aus freyer Hand die krumm
Linie hindurch, welche die verlangte Parabel ſey
wird. Wenn die Linien ih, lk, oe, dq u. ſ. g
zogen werden, ſo daß ſie auf der Abſciſſenlinie ſen
recht ſtehen, ſo entſtehen lauter Rechtecke ao, a
ar u. ſ. mithin iſt oe = xa, dq = ſa rp = ya u.
Vermöge der Conſtruktion war aber ſo = xa, fd =
ſa, fr = ya, ſg = za u. ſ. alſo iſt auch ſo = o
ſd = dq, ſr = rp, ſg = gn u. ſ. folglich die krumm
Linie durch dieſe Punkte eine Parabel.

§. 8.

Aufgabe.

Eine Gleichung für die Parabel zu finden.

1. Auflöſung.

Es ſey a (Fig. 3.) der Anfangspunkt der A
ſciſſen und g ein beliebiger Punkt in der Parab
Durch den Punkt g ziehe man die Linie gz mit d
Abſciſſenlinie kn parallel, ſo hat man in dem rec
winklichten Dreyecke zfg

$$zf^2 = zg^2 + zf^2$$

Es iſt aber fg = gn, zg = an und zf = za
ſa = gn — ſa, demnach wird

gf

$gf^2 = an^2 + (gn - fa)^2$ oder
$gn^2 = an^2 + gn^2 - 2gn.\ fa + fa^2$ oder
$o = an^2 + 2gn.\ fa + fa^2$.

Nun sey $an = x$, $ng = y$, und $fa = \alpha$, so hat man
$o = x^2 - 2.y.\alpha + \alpha^2$ oder
$2\alpha y = x^2 + \alpha^2$.

Nimmt man einen andern Punkt o in der Hyperbel an, und zieht ot auf die Axe senkrecht, so ist wiederum

$of^2 = ot^2 + tf^2$.

Aber so $= oe$, $ft = fa - tm = fa - oe$ und $ot = ae$, so ist

$oe^2 = ae^2 + (fa - oe)^2$ oder
$oe^2 = ae^2 + fa^2 - 2fa.oe + oe^2$ und
$o = ae^2 + fa^2 - 2fa.\ oe$.

Nun setze man $ae = x$, $eo = y$ und $fa = \alpha$, so ergiebt sich ebenfalls

$o = x^2 + \alpha^2 - 2\alpha.\ y$ also wiederum
$2\alpha y = x^2 + \alpha^2$.

Man mag also den Punkt in der Parabel annehmen wo man will, so ist allemal das gedoppelte Produkt aus der Entfernung des Fokus von der Abscissenlinie in die Applikate so groß als die Summe der Quadrate der Abscisse und der Entfernung des Brennpunktes von der Abscissenlinie.

Wenn man x negativ nimmt, so ist auch
$2\alpha y = (-x)^2 + \alpha^2 = x^2 + \alpha^2$.
Es liegen also auf beyden Seiten der Axe ähnlich gleiche Theile von der Parabel.

2. Auflösung.

Nimmt man den Scheitel m zum Anfangspunkt der Abcissen, und die Abscissen auf der Axe der Parabel, so sey g ein beliebiger Punkt in der Parabel und gz auf der Axe senkrecht, so hat man in dem rechtwinklichten Dreyecke zfg

$$gf^2 = gz^2 + zf^2$$

Aber $gf = gn = za = zm + ma = zm + mf$ und $zf = zm - mf$, also

$$(zm + mf)^2 = gz^2 + (zm - mf)^2 \text{ oder}$$

$$zm^2 + 2zm.\ mf + mf^2 = zg^2 + zm^2 - 2zm.\ mf + mf^2 \text{ oder}$$

$$4zm.\ mf = zg^2.$$

Nun sey $mz = x$ und $zg = y$, und $mf = \beta$, so ergiebt sich

$$4x\beta = y^2 \text{ d. h.}$$

Das vierfache Produkt aus der Abscisse in die Entfernung des Brennpunktes von dem Scheitel ist gleich dem Quadrate der Applikate.

Aus dieser Gleichung erhält man

$$y = \pm 2\sqrt{\beta x} \text{ d. h.}$$

Zu einerley x gehören allemal zwey Werthe von y welche für sich betrachtet einander gleich, einander aber entgegengesetzet sind, wie es auch der Natur der Parabel gemäs ist.

3. Auflösung.

Werden wie in voriger Auflösung die Abscissen auf der Axe vom Scheitel angerechnet, und es ist der Parameter dc gezogen, so hat man $df = dq = fa = 2fm$. Eben so erhellet, daß auch $fc = 2fm$, folglich ist $dc = 4fm$ oder der Parameter

ist gleich der vierfachen Entfernung des Brennpunktes von dem Scheitel. Setzt man also $fm = \beta$ und den Parameter $cd = p$, so hat man $4\beta = p$. Nun war

$$y^2 = 4\beta x, \text{ mithin auch}$$
$$y^2 = px \text{ d. h.}$$

Das Quadrat der Applikate ist gleich dem Rechtecke aus dem Parameter in die Abscisse.

§. 9.

Zusatz.

Wenn also der Parameter einer Parabel gegeben ist, so läßt sich die Parabel verzeichnen. Denn man hat $p = 4fm$, also $fm = \frac{1}{4}p = \frac{1}{4}dc$; verlängert man also fm nach a und macht $am = mf$, so hat man auch die Lage der Linie kn, und man kann nun vermöge des §. 7. die Parabel zeichnen.

§. 10.

Zusatz.

Weil also $mf.\ p = fd^2$ und aus eben dem Grunde $mz.\ p = zg^2$, so hat man $fd^2 : zg^2 = mf.\ p : mz.\ p$ oder

$$fd^2 : zg^2 = mf : mz \text{ d. h.}$$

Die Quadrate der Applikaten in einer Hyperbel verhalten sich wie die dazu gehörigen Abscissen. Hieraus folget, daß die Parabel eine krumme Linie, welche sich ins unendliche hinaus erstrecket, und folglich von der Axe sich immer mehr entfernen muß.

§. 11.

Erklärung.

Die krumme Linie adbe (Fig. 5.), welche i
Ansehung zweyer festen Punkte f und g so beschaf
fen ist, daß die Summe der Entfernungen diese
beyden Punkte von irgend einem Punkte in de
krummen Linie allemal gleich sey, heißt eine Ellipse
Dieser Erklärung zu Folge muß also fd + dg =
fh + hg = fi + ig = fb + gb = ga + fa u. s. seyn
Die beyden festen Punkte f und g heißen hier di
Brennpunkte, die gerade Linie ab durch beyd
Brennpunkte bis an den Umfang der Ellipse di
Hauptaxe, große Axe, erste Axe der Ellips
und die beyden Punkte a und b die Scheitel. Fer
ner nennt man die Entfernungen fd, fh, fi, gd
gi, gh u. s. der Brennpunkte von irgend einen
Punkte in dem Umfange der Ellipse die Radii
vektoren, und die Entfernungen gb und ga oder
fa und fb eines Brennpunktes von beyden Schei
teln die Apsiden. Der Punkt c in der Mitte der
Hauptaxe heißt der Mittelpunkt der Ellipse, und
die gerade Linie de durch den Mittelpunkt c auf
der Hauptaxe ab senkrecht bis an den Umfang der
Ellipse die kleine Axe, Zwergaxe, konjugirte
Axe. Endlich heißen noch die Entfernungen des
Mittelpunktes c der Ellipse von den beyden Brenn
punkten oder cf, cg die Excentricität, und die
geraden Linien lk und im durch beyde Brennpunkte
bis zum Umfang der Ellipse auf der Hauptaxe senk
recht die Parameter der Ellipse.

§. 12.

Zusatz.

Der Mittelpunkt ist von den Brennpunkten gleich weit entfernet. Denn vermöge der Erklärung der Ellipse ist ag + af = fb + gb oder 2af + fg = 2gb + fg mithin 2af = 2gb und af = gb, und eben daher ac − af = cb − gb oder cf = cg.

§. 13.

Zusatz.

Die Summe zweyer Radiivektoren in einer *Ellipse* ist allemal der großen Axe gleich. Denn es ist fh + hg = fb + gb = fg + 2gb = 2cg + 2gb = 2(cg + gb) = 2cb = ab. Ferner hat man auch ag + gb = ag + af = 2ac, also af − ac = ac − ag d. h. die halbe Hauptaxe ist die mittlere arithmetische Proportionallinie zwischen af u. ag

§. 14.

Zusatz.

Wenn man einige Punkte in der Ellipse bestimmen will, durch welche sodann die Ellipse selbst mittelst einer zarten Feder hindurch geführet werden könnte, so bestimme man die große und kleine Axe ab und ed. Hierauf fasse man mit einem Zirkel die halbe große Axe cb und beschreibe damit aus dem Punkte d einen Kreis, welcher die Axe ab in den beyden Brennpunkten f und g schneiden wird. Nun nehme man in der Hauptaxe ab noch Belieben Punkte o, p u. s. an, fasse ao mit dem

Zir-

Zirkel und schlage aus dem Brennpunkte f hiermi einen Kreisbogen, ferner fasse man auch bo und schlage hiermit aus dem andern Brennpunkte g einen Kreisbogen, welcher den erstern in h schneiden wird. Auf eben diese Art werden nun fi = ap und gi = bp u. s. gemacht. Die Punkte d, h, i u. s. liegen in der Ellipse, also kann man aus freyer Hand durch diese bestimmten Punkte eine Ellipse verzeichnen. Denn weil ao = fn, ob = gh, ap = fi, pb = gi u. s. so hat man fh + hg = ao + ob = ab = fi + ig u. s.

§. 15.

Aufgabe.

Es ist die halbe große Axe ac (Fig. 6.) nebst der Eccentricität cf = cg gegeben, man sucht eine Gleichung für die Ellipse.

1. Auflösung.

Wenn der Ursprung der Abscissen aus dem Mittelpunkte der Ellipse genommen wird, so sey ci = x und ih = y. Ferner sey die große Axe ab = α, die Eccentricität cf = cg = ε, und gh = ϱ. Nun hat man in den beyden rechtwinklichten Dreyecken fhi und ihg

$$fh^2 = fi^2 + ih^2 \text{ und}$$
$$hg^2 = ig^2 + ih^2.$$

Weil nun fh + hg = 2ac oder fh + ϱ = α, also fh = $\alpha - \varrho$, und fi = fc + ci = $\varepsilon + x$, und ig = cg − ci = $\varepsilon - x$, so hat man

$(\alpha - \varrho)^2$

$(a-\varrho)^2 = (\varepsilon+x)^2 + y^2$ und
$\varrho^2 = (\varepsilon-x)^2 + y^2$ oder
$a^2 - 2a\varrho + \varrho^2 = \varepsilon^2 + 2\varepsilon x + x^2 + y^2$ und
subtrah. $\varrho^2 = \varepsilon^2 - 2\varepsilon x + x^2 + y^2$

$a^2 - 2a\varrho = 4\varepsilon a$ und
$2a\varrho = a^2 - 4\varepsilon x$ also
$4a\varepsilon\varrho^2 = a^4 - 8a^2\varepsilon x + 16\varepsilon^2 x^2$, und

$$\varrho^2 = \tfrac{1}{4}a^2 - 2\varepsilon x + \frac{4\varepsilon^2 x^2}{a^2}.$$

Setzt man nun diesen Werth in die Gleichung

$$\varrho^2 = \varepsilon^2 - 2\varepsilon x + x^2 + y^2.$$

so ergiebt sich

$$\varepsilon^2 - 2\varepsilon x + x^2 + y^2 = \tfrac{1}{4}a^2 - 2\varepsilon x + \frac{4\varepsilon^2 x^2}{a^2} \text{ also}$$

$$\varepsilon^2 + x^2 + y^2 = \tfrac{1}{4}a^2 + \frac{4\varepsilon^2 x^2}{a^2}, \text{ und}$$

$$y^2 = \tfrac{1}{4}a^2 - \varepsilon^2 + \frac{4\varepsilon^2 x^2}{a^2} - x^2 \text{ oder}$$

$$y^2 = \tfrac{1}{4}a^2 - \varepsilon^2 + x^2\left(\frac{4\varepsilon^2}{a^2} - 1\right) \text{ oder}$$

$$y^2 = \left(\tfrac{1}{4}a^2 - \varepsilon^2\right) + x^2\left(\frac{4\varepsilon^2 - a^2}{a^2}\right) \text{ oder}$$

$$y^2 = \left(\frac{a^2 - 4\varepsilon^2}{4}\right) - \left(\frac{a^2 - 4\varepsilon^2}{a^2}\right)x^2 \text{ also}$$

$4a^2y^2 = a^2(a^2 - 4\varepsilon^2) - 4(a^2 - 4\varepsilon^2)x^2$ oder
$a^2y^2 = \tfrac{1}{4}a^2(a^2 - 4\varepsilon^2) - (a^2 - 4\varepsilon^2)x^2$ oder
$a^2y^2 = (\tfrac{1}{4}a^2 - x^2)(a^2 - 4\varepsilon^2)$ folglich

$$y^2 = \frac{(\tfrac{1}{4}a^2 - x^2)(a^2 - 4\varepsilon^2)}{a^2} \text{ oder}$$

$$y^2 = \frac{(\tfrac{1}{4}a^2 - x^2)(\tfrac{1}{4}a^2 - \varepsilon^2)}{\tfrac{1}{4}a^2} \text{ d. h.}$$

das

Das Quadrat der Applikate ist gleich dem Produkte aus der Differenz der Quadrate der halben Hauptaxe und der Abscisse in die Differenz der Quadrate der halben Hauptaxe und der Eccentricität durch das Quadrat der halben Hauptaxe dividiret.

Nun hat man $(\frac{1}{4}a^2 - x^2) = (\frac{1}{2}a + x)(\frac{1}{2}a - x)$ und

$$(\tfrac{1}{4}a^2 - \varepsilon^2) = (\tfrac{1}{2}a + \varepsilon)(\tfrac{1}{2}a - \varepsilon)$$

also wird

$$y^2 = \frac{(\frac{1}{2}a + x)(\frac{1}{2}a - x)(\frac{1}{2}a + \varepsilon)(\frac{1}{2}a - \varepsilon)}{\frac{1}{4}a^2} \text{ oder}$$

$$\tfrac{1}{4}a^2\, y^2 = (\tfrac{1}{2}a + x)(\tfrac{1}{2}a - x)(\tfrac{1}{2}a + \varepsilon)(\tfrac{1}{2}a - \varepsilon)$$

folglich

$$\tfrac{1}{4}a^2 : (\tfrac{1}{2}a + x)(\tfrac{1}{2}a - x) = (\tfrac{1}{2}a + \varepsilon)(\tfrac{1}{2}a - \varepsilon) : y^2 \text{ d. h.}$$

das Quadrat der halben Hauptaxe verhält sich zum Produkte aus der Summe und Differenz der halben Hauptaxe und der Abscisse, wie sich verhält das Produkt aus der Summe und Differenz der halben Hauptaxe und der Eccenticität zum Quadrate der Applikate.

Es ist aber $\frac{1}{2}a + x = ai$, $\frac{1}{2}a - x = ib$, $\frac{1}{2}a + \varepsilon = ag = fb$ und $\frac{1}{2}a - \varepsilon = af$, also hat man

$$ac^2 : ai \times ib = fb \times af : ih^2 \text{ d. h.}$$

das Quadrat der halben Hauptaxe verhält sich zum Rechtecke aus beyden von der Applikate abgeschnittenen Theilen der Hauptaxe wie das Rechteck aus beyden Apsiden zum Quadrate der Applikate.

2. Auflösung.

Nimmt man den Scheitel a zum Ursprunge der Abscissen an, so sei $ai = x$ und $ih = y$. Ferner ist nun $ib = ab - ai = a - x$. Noch sey die

Apside

Apside af = δ, so ist auch fb = ab − af = $\alpha - \delta$, mithin erhält man

$\frac{1}{4}\alpha^2 : x(\alpha - x) = \delta(\alpha - \delta) : y^2$ also

$$y^2 = \frac{x(\alpha - x)\,\delta(\alpha - \delta)}{\frac{1}{4}\alpha^2}.$$

§. 16.

Zusatz.

Wenn man in der letzten Gleichung die Abscisse x der halben Hauptaxe oder $\frac{1}{2}\alpha$ gleich nimmt, so wird die dazu gehörige Applikate y der halben *konjugirten* Axe gleich. In diesem Falle setze man die *ganze konjugirte* Axe = β, also die Hälfte = $\frac{1}{2}\beta$, und es wird

$$\frac{1}{4}\beta^2 = \frac{\frac{1}{2}\alpha(\alpha - \frac{1}{2}\alpha)\,\delta(\alpha - \delta)}{\frac{1}{4}\alpha^2} \text{ oder}$$

$$\frac{1}{4}\beta^2 = \frac{\frac{1}{4}\alpha^2 \cdot \delta(\alpha - \delta)}{\frac{1}{4}\alpha^2} = \delta(\alpha - \delta) \text{ d. h.}$$

das Quadrat der halben Hauptaxe ist dem Rechtecke aus beyden Apsiden gleich.

Aus dieser Gleichung ergiebt sich ferner

$\delta : \frac{1}{2}\beta = \frac{1}{2}\beta : (\alpha - \delta)$ d. h.

die halbe kleine Axe ist die mittlere Proportionallinie zwischen beyden Apsiden.

§. 17.

Zusatz.

Nimmt man ferner die Abscisse der Apside δ gleich, so wird y = dem halben Parameter. Der

Pa-

Parameter sey p also der halbe Parameter $= \frac{1}{2}$
und man hat

$$\frac{1}{4}p^2 = \frac{z(a-z)\ z(a-z)}{\frac{1}{4}a^2} \text{ also}$$

$\frac{1}{4}a^2 \cdot \frac{1}{4}p^2 = z(a-z)\ z(a-z)$ und
$\frac{1}{4}a^2 : z(a-z) = z(a-z) : \frac{1}{4}p^2$ d. h.
das Rechteck aus beyden Apsiden ist die mittlere Proportionalgröße zwischen dem Quadrate der halben Hauptaxe und dem Quadrate des halben Parameters.

Eben diese Gleichung giebt noch

$$\frac{1}{2}p = \frac{z(a-z)}{\frac{1}{2}a} \text{ also auch}$$

$\frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{2}p = z(a-z)$ d. h.
das Rechteck aus der halben Hauptaxe in den halben Parameter ist dem Rechtecke aus beyden Apsiden gleich.

§. 18.

Zusatz.

Es war $\frac{1}{4}\beta^2 = z(a-z)$ (§. 15.) und
$\frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{2}p = z(a-z)$, also hat man auch
$\frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{2}p = \frac{1}{4}\beta^2$ und
$\frac{1}{2}a : \frac{1}{2}\beta = \frac{1}{2}\beta : \frac{1}{2}p$ oder
$a : \beta = \beta : p$ d. h.
die kleine Axe in der Ellipse ist allemal die mittlere Proportionallinie zwischen der großen Axe und dem Parameter.

§. 19.

Zusatz.

Wenn also die Hauptaxe und der Parameter einer Ellipse gegeben wäre, und es sollte die

Ellipse

Ellipse beschrieben werden, so suche man die mittlere Proportionallinie zwischen der Hauptaxe und dem Paramenter, diese ist alsdenn die konjugirte Axe. Hieraus läßt sich vermöge des §. 14. die Ellipse beschreiben.

§. 20.

Zusatz.

Wenn $y = o$ wird, so hat man auch

$$\frac{x(a-x)\ 8\ (a-8)}{\frac{1}{4}a^2} = o, \text{ oder}$$

$x(a-x) = o$ also

$ax - x^2 = o$ und

$ax = x^2$ und $a = x$ d. h.

Wenn die Applikate verschwindet, so wird die Abscisse der Hauptaxe gleich, und es muß die Ellipse die Axe in diesem Punkte schneiden. Wird endlich auch $x = o$, so verschwindet auch y, und es muß die Ellipse die Axe noch einmal schneiden. Hieraus folgt, daß die Ellipse eine krumme Linie sey, welche wie der Kreis in sich selbst zurückläuft.

Es theilet daher die Hauptaxe so wohl als auch die Zwergaxe die Ellipse in zwey ähnliche gleiche Theile.

§. 21.

Aufgabe.

Es sind beyde Axen der Ellipse gegeben, man soll eine Gleichung finden.

1. Auflösung.

Wenn der Anfangspunkt der Abscissen in de
Mittelpunkte der Ellipse angenommen wird,
hat man

$$y^2 = \frac{(\frac{1}{2}\alpha+x)(\frac{1}{2}\alpha-x)(\frac{1}{2}\alpha+\varepsilon)(\frac{1}{2}\alpha-\varepsilon)}{\frac{1}{4}\alpha^2} \text{ (§. 14.}$$

Es ist aber $(\frac{1}{2}\alpha+\varepsilon)(\frac{1}{2}\alpha-\varepsilon) = \frac{1}{4}\beta^2$ (§. 15.), al

$$y^2 = \frac{\frac{1}{4}\beta^2(\frac{1}{2}\alpha+x)(\frac{1}{2}\alpha-x)}{\frac{1}{4}\alpha^2}$$

$$= \frac{\beta^2}{\alpha^2}(\frac{1}{2}\alpha+x)(\frac{1}{2}\alpha-x)$$

$$= \frac{\beta^2}{\alpha^2}(\frac{1}{4}\alpha^2 - x^2).$$

2. Auflösung.

Wenn der Anfangspunkt der Abscissen in de
Scheitel angenommen wird, so hat man

$$y^2 = \frac{x(\alpha-x)\,\delta(\alpha-\delta)}{\frac{1}{4}\alpha^2} \text{ (§. 14.).}$$

Es ist aber auch hier

$\delta(\alpha-\delta) = \frac{1}{4}\beta^2$ (§. 15.), mithin wird

$$y^2 = \frac{\frac{1}{4}\beta^2(x(\alpha-x))}{\frac{1}{4}\alpha^2} = \frac{\beta^2}{\alpha^2}\cdot x(\alpha-x).$$

§. 22.

Aufgabe.

Es ist der Parameter nebst der Hauptaxe gege
ben, man soll eine Gleichung für die Ellipse finden

1. Auflösung.

Wenn die Abscissen aus dem Mittelpunkt
angerechnet werden, so war

$$y^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2}(\frac{1}{4}\alpha^2 - x^2) \text{ (§. 21.)}$$

Es

Es ist aber der Parameter die dritte Proportionallinie zu α und β, mithin

$\alpha : \beta = \beta : p$ (§. 17.) und daher

$p = \frac{\beta^2}{\alpha}$ und $\alpha p = \beta^2$; also wird

$$y^2 = \frac{\alpha p}{\alpha^2}(\tfrac{1}{4}\alpha^2 - x^2)$$

$$= \frac{p}{\alpha} \cdot (\tfrac{1}{4}\alpha^2 - x^2).$$

2. Auflösung.

Werden die Abscissen von dem einen Scheitel angerechnet, so ist

$y^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2} x (\alpha - x)$ (§. 20.) demnach

$$y^2 = \frac{\alpha p}{\alpha^2} x (\alpha - x)$$

$$= \frac{p}{\alpha} \cdot x (\alpha - x).$$

§. 23.

Zusatz.

Es sey X eine andere Abscisse in der Ellipse und Y die dazu gehörige Applikate, so hat man auch

$Y^2 = \frac{p}{\alpha} \cdot X (\alpha - X)$; demnach

$$y^2 : Y^2 = \frac{p}{\alpha} \cdot x(\alpha - x) : \frac{p}{\alpha} \cdot X(\alpha - X) \text{ od.}$$

$y^2 : Y^2 = x (\alpha - x) : X (\alpha - X)$ d. h.

in einer Ellipse verhalten sich die Quadrate der Applikaten zu einander, wie die Rechtecke aus beyden abgeschnittenen Theilen der Hauptaxe, welche Theile von den Applikaten bestimmt werden.

§. 24.

Aufgabe.

Eine Gleichung für die Ellipse zu finde wenn die Abscissen auf der konjugirten Axe ang nommen werden.

1. Auflösung.

Es sey der Mittelpunkt der Anfangspunkt d Abscissen, so ist in Ansehung der Hauptaxe

$$y^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2}\left(\tfrac{1}{4}\alpha^2 - x^2\right).$$

Setzt man nun umgekehrt ck (Fig. 6.) = hi = und kh = ci = y, so wird

$$x^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2}\left(\tfrac{1}{4}\alpha^2 - y^2\right), \text{ folglich}$$

$$y^2 = \frac{\alpha^2}{\beta^2}\left(\tfrac{1}{4}\beta^2 - x^2\right).$$

2. Auflösung.

Rechnet man den Scheitel d zum Anfange punkt der Abscissen, so setze man dk = x', un man hat

ck = cd − dk = $\frac{1}{2}\beta - x' = x$ also $\frac{1}{4}\beta^2 - \beta x' + x'x' = x^2$. Setzt man Diesen Werth von x in die vorige Gleichung, s erhält man

$$y^2 = \frac{\alpha^2}{\beta^2}\left(\beta x' - x'x'\right).$$

Beyde gefundene Gleichungen sind denen in Anse hung der Hauptaxe vollkommen ähnlich, nur daß α und β vewechselt sind.

§. 25.

Zusatz.

Man suche zu β und α die mittlere Proportionalgröße p, so hat man

$\beta : \alpha = \alpha : p$ also

$p = \frac{\alpha^2}{\beta}$ und $p\beta = \alpha^2$, mithin wird

1. $y^2 = \frac{p}{\beta}(\frac{1}{4}\beta^2 - x^2)$ und

2. $y^2 = \frac{p}{\beta}(\beta x' - x'x')$.

Diese dritte Proportionalgröße kann man auch hier den Parameter der kleinen Axe nennen, ob es gleich auf selbiger keine Brennpunkte geben kann. Es ist also dieser Parameter größer als eine jede von beyden Axen.

§. 26.

Zusatz.

Man beschreibe mit dem Halbmesser $= \frac{1}{2}\alpha$ einen Kreis, so würde die Gleichung desselben aus dem Mittelpunkte gerechnet

$y^2 = \frac{1}{4}\alpha^2 - x^2$ seyn (§. 4.)

mithin verhält sich

y^2 im Kreise : y^2 in d. Ellip. $= (\frac{1}{4}\alpha^2 - x^2) : \frac{\beta^2}{\alpha^2}(\frac{1}{4}\alpha^2 - x^2)$

oder y^2 im Kreise : y^2 in d. Ellip. $= 1 : \frac{\beta^2}{\alpha^2}$ oder

$= \alpha^2 : \beta^2$ also auch

y im Kreise : y in d. Ellip. $= \alpha : \beta$.

Beschreibet man aber mit dem Halbmesser $= \frac{1}{2}\beta$ einen Kreis, so hat man in selbigem

$y^2 = \frac{1}{4}\beta^2 - x^2$, also verhält sich

y^2 im Kreise : y^2 in d. Ellip. $= (\frac{1}{4}\beta^2 - x^2)$

$$\frac{\alpha^2}{\beta^2}(\tfrac{1}{4}\beta^2 - x^2) = 1 : \frac{\alpha^2}{\beta^2} = \beta^2 : \alpha^2$$

oder y im Krey: y in der Ell. $= \beta : \alpha$.

Wären demnach die Hauptaxe und kleine Axe bestimmt, so lassen sich Punkte finden, welche in der Ellipse liegen. Man beschreibe nemlich mit $\frac{1}{2}\alpha =$ ac (Fig. 6.) einen Kreis, und ziehe aus n, l u. f. die Applikaten no, lm u. f. suche sodann zu $\frac{1}{2}\alpha$, $\frac{1}{2}\beta$ und y die vierten Proportionallinien als die Applikaten np, lq u. f. welche zur Ellipse gehören.

Beschreibet man ferner mit dem Halbmesser $\frac{1}{2}\beta =$ dc (Fig. 5.) einen Kreis, zieht auch hier die Applikaten xt, vs u. f. und suchet zu $\frac{1}{2}\beta$, $\frac{1}{2}\alpha$ und y die vierten Proportionallinien, so werden diese die Applikaten xq, vr u. f. der Ellipse, und es läßt sich die Ellipse zeichnen.

§. 27.

Zusatz.

Auch in Ansehung der Zwergaxe verhalten sich die Quadrate der Applikaten zu einander wie die Rechtecke aus den von den Applikaten abgeschnittenen Theile der kleinen Axe. (§. 22. 23.).

§. 28.

Erklärung.

Die krumme Linie edh (Fig. 7.), welche in Ansehung zweyer fester Punkte g und f von der Natur ist, daß die Differenz der Entfernungen eines jeden Punktes in der krummen Linie von den beyden festen Punkten einerley, heißt eine Hyperbel. Nach dieser Erklärung wird also erfordert, daß ge — ef = gd — df = gb — bf u. f. sey. Eben diese Beschaffenheit hat es nun auch mit der krummen Linie ial in Ansehung beyder festen Punkte g und f. Daher pflegt man allemal zwey Hyperbeln zugleich, die einander entgegengesetzet sind, in Betrachtung zu ziehen. Die beyden festen Punkte g und f nennt man auch hier die **Brennpunkte**, und die Entfernungen derselben von einem jeden in der Hyperbel liegenden Punkte die **Radii Vektoren** oder kurz die **Vektoren**. Die beyden Punkte a und b durch welche die gerade Linie gf gehet, heißen die **Scheitel**, und die Entfernungen eines jeden Brennpunktes von den Scheiteln oder fb und fa oder ga und gb die **Apsiden**. Ferner heißt der Theil ab der geraden Linie gf zwischen den Scheiteln a und b die **Hauptaxe**, und die Mitte derselben der **Mittelpunkt**. Endlich nennt man noch die Entfernung des Mittelpunktes von einem jeden Brennpunkte oder cg, cf die **Excentricität** und die Linie km oder il durch die Brennpunkte auf die Hauptaxe senkrecht gezogen der **Parameter**. Zu der Hauptaxe ab und dem Parameter km oder il suche man die mittlere Proportionallinie no, welche in dem Mittelpunkt c auf der Haupt-

axe rechtwinklicht halbiret ist, so nennt man dies noch die zweyte oder konjugirte, zugeordnete Axe.

§. 29.

Zusatz.

Weil vermöge der Erklärung gb − bf = fa − ag oder ga + ab − bf = fb + ab − ag ist, so hat man 2ag = 2fb und daher ag = fb. Ferner ist auch gd − df = gb − bf oder gd − df = ga + ab − bf, also gd − df = ab d. h. die Differenz zweyer Vektoren ist allemal der Hauptaxe gleich.

§. 30.

Zusatz.

Wenn man einige Punkte in der Hyperbel bestimmen will, um durch selbige die Hyperbel selbst durchzuführen, so kann es folgendermaassen geschehen man beschreibe mit einem willkührlichen Halbmesser fd aus dem Brennpunkte f einen Kreisbogen hierauf addire man diesen Halbmesser fd zu der gegebenen Hauptaxe ab, und beschreibe mit dieser Länge aus dem andern Brennpunkte g einen Kreisbogen, welcher den vorigen in d schneiden wird.

Auf eben diese Art läßt sich nun auch der Punkt e u. s. f. bestimmen. Eine Linie durch diese bestimmten Punkte aus freyer Hand gezogen wird die verlangte Hyperbel. Denn vermöge der Verzeichnung ist ab + fd = gd mithin gd − fd = ab, wie bey der Hyperbel erfordert wird.

§. 31.

Aufgabe.

Es ist die Hauptaxe nebst der Eccentricität gegeben, man soll eine Gleichung für die Hyperbel finden.

1. Auflösung.

Wenn der Ursprung der Abscissen vom Mittelpunkte an gerechnet wird, so sey die ganze Hauptaxe $ab = \alpha$, die Eccentricität $cf = \varepsilon$, die Abscisse $cq = x$ und die dazu gehörige Applikate $qd = y$. Noch setze man $fd = \varrho$. Die beyden rechtwinklichten Dreyecke gdq und fdq geben

$$gd^2 = gq^2 + qd^2 \text{ und}$$
$$df^2 = qf^2 + qd^2.$$

Es ist aber $gd - df = ab$ oder $gd - \varrho = \alpha$, also auch $gd = \alpha + \varrho$; ferner $gq = gc + cq = \varepsilon + x$, und $qf = fc - cq = \varepsilon - x$, und man hat

$$(\alpha + \varrho)^2 = (\varepsilon + x)^2 + y^2 \text{ und}$$
$$\varrho^2 = (\varepsilon - x)^2 + y^2 \text{ oder}$$
$$\alpha^2 + 2\alpha\varrho + \varrho^2 = \varepsilon^2 + 2\varepsilon x + x^2 + y^2$$
$$\text{subtr.} \quad \varrho^2 = \varepsilon^2 - 2\varepsilon x + x^2 + y^2$$

$$\alpha^2 + 2\alpha\varrho = 4\varepsilon x \text{ oder}$$
$$\tfrac{1}{4}\alpha^2 + \tfrac{1}{2}\alpha\varrho = \varepsilon x \text{ und}$$
$$\tfrac{1}{2}\alpha\varrho = \varepsilon x - \tfrac{1}{4}\alpha^2 \text{ also}$$
$$\tfrac{1}{4}\alpha^2\varrho^2 = \varepsilon^2 x^2 - \tfrac{1}{2}\alpha\varepsilon x + \tfrac{1}{16}\alpha^2$$

mithin

$$\varrho^2 = \frac{4\varepsilon^2 x^2}{\alpha^2} - 2\varepsilon x + \tfrac{1}{4}\alpha^2.$$

Setzt man nun diesen Werth von ϱ^2 in die Gleichung

$$\varrho^2 = \varepsilon^2 - 2\varepsilon x + x^2 + y^2$$ so ergiebt sich

$$\frac{4\varepsilon^2 x^2}{a^2} - 2\varepsilon x + \tfrac{1}{4}a^2 = \varepsilon^2 - 2\varepsilon x + x^2 + y^2 \text{ oder}$$

$$\frac{4\varepsilon^2 x^2}{a^2} + \tfrac{1}{4}a^2 = \varepsilon^2 + x^2 + y^2 \text{ also}$$

$$y^2 = \frac{4\varepsilon^2 x^2}{a^2} + \tfrac{1}{4}a^2 - \varepsilon^2 - x^2 \text{ oder}$$

$$y^2 = \frac{4\varepsilon^2 x^2}{a^2} - x^2 - (\varepsilon^2 - \tfrac{1}{4}a^2) \text{ oder}$$

$$a^2 y^2 = (4\varepsilon^2 x^2 - a^2 x^2) - (\varepsilon^2 - \tfrac{1}{4}a^2)\, a^2 \text{ oder}$$
$$a^2 y^2 = x^2 (4\varepsilon^2 - a^2) - (\varepsilon^2 - \tfrac{1}{4}a^2)\, a^2 \text{ oder}$$
$$\tfrac{1}{4}a^2 y^2 = x^2 (\varepsilon^2 - \tfrac{1}{4}a^2) - (\varepsilon^2 - \tfrac{1}{4}a^2)\, \tfrac{1}{4}a^2 \text{ oder}$$
$$\tfrac{1}{4}a^2 y^2 = (x^2 - \tfrac{1}{4}a^2)(\varepsilon^2 - \tfrac{1}{4}a^2), \text{ also}$$
$$y^2 = \frac{(x^2 - \tfrac{1}{4}a^2)(\varepsilon^2 - \tfrac{1}{4}a^2)}{\tfrac{1}{4}a^2}.$$

Weil nun ferner $x^2 - \tfrac{1}{4}a^2 = (x + \tfrac{1}{2}a)(x - \tfrac{1}{2}a)$ u.
$\varepsilon^2 - \tfrac{1}{4}a^2 = (\varepsilon + \tfrac{1}{2}a)(\varepsilon - \tfrac{1}{2}a)$,
so ist auch

$$y^2 = \frac{(x + \tfrac{1}{2}a)(x - \tfrac{1}{2}a)(\varepsilon + \tfrac{1}{2}a)(\varepsilon - \tfrac{1}{2}a)}{\tfrac{1}{4}a^2} \text{ u.}$$

$\tfrac{1}{4}a^2 y^2 = (x + \tfrac{1}{2}a)(x - \tfrac{1}{2}a)(\varepsilon + \tfrac{1}{2}a)(\varepsilon - \tfrac{1}{2}a)$ d. h.
$\tfrac{1}{4}a^2 : (\varepsilon + \tfrac{1}{2}a)(\varepsilon - \tfrac{1}{2}a) = (x + \tfrac{1}{2}a)(x - \tfrac{1}{2}a) : y^2$ od.
$ac^2 : gb \times bf = aq \times bq : y^2$ d. h.

Das Quadrat der halben Hauptaxe verhält sich zum Rechteck der beyden Apsiden, wie das Rechteck aus beyden abgeschnittenen Theilen der Axe aq und bq zum Quadrate der Applikate.

2. Auflösung.

Wenn der Anfangspnnkt der Abscissen vom nächsten Scheitel b angenommen wird, so sey bq = x, qd = y, bf = s, so hat man bg = ba + ag = ba + bf = a + s und aq = ab + bq = a + x, mithin

$\frac{1}{4}a^2 : (a+s)\,s = (a+x)\,x : y^2$ folglich

$$y^2 = \frac{(a+s)\,s\,(a+x)\,x}{\frac{1}{4}a^2}.$$

§. 32.

Zusatz.

Wenn die Abscisse bq = bf = s wird, so erhält die Applikate den Werth fk = dem halben Parameter. Setzt man also den ganzen Parameter = p, so wird

$$\frac{1}{4}p^2 = \frac{(a+s)\,s\,(a+s)\,s}{\frac{1}{4}a^2} \text{ also}$$

$\frac{1}{4}a^2 : (a+s)\,s = (a+s)\,s : \frac{1}{4}p^2$ d. h.

Das Rechteck aus beyden Apsiden ist die mittlere Proportionalgröße zwischen den Quadraten der halben Hauptaxe und dem halben Parameter.

Aus dieser Gleichung erhällt man auch

$$\frac{1}{2}p = \frac{(a+s)\,s}{\frac{1}{2}a} \text{ also}$$

$\frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{2}p = (a+s)\,s$ d. h.

$\frac{1}{2}a : a+s = s : \frac{1}{2}p$ d h.

Die halbe Hauptaxe verhält sich zu einer Apside, wie die andere zum halben Parameter, oder das Rechteck aus der halben Hauptaxe in den halben

Para-

Parameter ist dem Rechtecke aus beyden Apsiden gleich.

§. 33.

Aufgabe.

Es ist die Hauptaxe nebst dem Parameter gegeben, man soll die Hyperbel beschreiben.

Auflösung.

1. Man suche zwischen der halben Hauptaxe und dem halben Parameter die mittlere Proportionallinie, und setze diese durch den Punkt b auf die Hauptaxe senkrecht in br.

2. Hierauf beschreibe man aus dem Mittelpunkte c einen Kreis, welcher durch den Punkt r gehet, so wird selbiger die verlängerte Hauptaxe in beyden Brennpunkten f und g schneiden.

3. Weil nun die Brennpunkte bestimmt sind, so lassen sich vermöge des §. 30. Punkte in der Hyperbel finden, durch welche selbige gezeichnet werden kann.

Beweis.

Weil br senkrecht auf dem Durchmesser gf stehet, so hat man aus geometrischen Gründen.

$$fb : br = br : bg \text{ oder}$$
$$fb : br = br : (ba + ag) \text{ oder}$$
$$fb : br = br : (ba + bf).$$

Es ist aber $br = \sqrt{(\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}p)}$, also

$$fb : \sqrt{(\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}p)} = \sqrt{(\frac{1}{2}\alpha . \frac{1}{2}p)} : (\alpha + bf)$$

mithin $fb\,(\alpha + fb) = \frac{1}{2}\alpha . \frac{1}{2}p$.

Nun war $\frac{1}{2}\alpha . \frac{1}{2}p = (\alpha + \delta)\,\delta$, also auch

$$fb\,(\alpha + fb) = (\alpha + \delta)\,\delta \text{ mithin}$$
$$fb = \delta.$$

§. 34.

Zusatz.

Die halbe konjugirte Axe ist die mittlere Proportinallinie zwischen der halben Hauptaxe und dem halben Paramer. Wenn demnach die halbe konjugirte Axe nebst der halben Hauptaxe gegeben, so setze man jene durch b auf ab senkrecht auf und verfahre wie im vorigen §. da sich alsdenn wie vorhin die Hyperbel verzeichnen läßt.

§. 35.

Aufgabe.

Es ist die Hauptaxe nebst dem Parameter gegeben, man soll eine Gleichung für die Hyperbel finden.

1. Auflösung.

Wenn die Abscissen vom Mittelpunkt angenommen werden, so ist

$$y^2 = \frac{(x+\frac{1}{2}a)(x-\frac{1}{2}a)(\varepsilon+\frac{1}{2}a)(\varepsilon-\frac{1}{2}a)}{\frac{1}{4}a^2}$$

Es ist aber $(\varepsilon+\frac{1}{2}a)(\varepsilon-\frac{1}{2}a)$ das Rechteck aus beyden Apsiden also $=\frac{1}{2}a.\frac{1}{2}p$ (§. 31.) demnach wird

$$y^2 = \frac{(x+\frac{1}{2}a)(x-\frac{1}{2}a).\frac{1}{2}a.\frac{1}{2}p}{\frac{1}{4}a^2} \text{ oder}$$

$$y^2 = \frac{(x+\frac{1}{2}a)(x-\frac{1}{2}a)\frac{1}{2}p}{\frac{1}{2}a}$$

$$= \frac{p}{a}(x+\frac{1}{2}a)(x-\frac{1}{2}a)$$

$$= \frac{p}{a}(x^2-\frac{1}{4}a^2)$$

2. Auf-

2. Auflösung.

Wennn man den Anfangspunkt der Abscis vom nächsten Scheitel anrechnet so ist

$$y^2 = \frac{(a+s)\,s\,(a+x)\,x}{\frac{1}{4}a^2}.$$

Es ist aber wiederum $(a+s)\,s$ das Rechteck a beyden Apsiden mithin $= \frac{1}{2}a\ \frac{1}{2}p$, demnach wir

$$y^2 = \frac{\frac{1}{2}a.\ \frac{1}{2}p\,(a+x)\,x}{\frac{1}{4}a^2}$$

$$= \frac{p}{a}(a+x)\,x$$

$$= \frac{p}{a}(ax+x^2).$$

§. 36.

Aufgabe.

Es ist die Hauptaxe nebst der konjugirten A gegeben, man soll eine Gleichung für die Hype bel finden.

1. Auflösung.

Werden die Abscissen vom Mittelpunkte gerechnet, so ist

$$y^2 = \frac{p}{a}(x^2 - \tfrac{1}{4}a^2).$$

Setzt man die konjugirte Axe $= \beta$, so ist

$$a:\beta = \beta:p \text{ mithin } p = \frac{\beta^2}{a},$$

also erhält man

$$y^2 = \frac{\beta^2}{a^2}(x^2 - \tfrac{1}{4}a^2).$$

2. Au

2. Auflösung.

Rechnet man die Abscissen vom nächsten Scheitel an, so ist

$$y^2 = \frac{p}{\alpha}(\alpha x + x^2), \text{ demnach auch}$$

$$y^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2}(\alpha x + \alpha^2).$$

§. 37.

Zusatz.

Man nehme eine andere Abscisse X, und die dazu gehörige Applikate sey Y, so hat man aus vorigen Gründen

$$Y^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2}(\alpha X + X^2), \text{ also}$$

$$y^2 : Y^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2}(\alpha x + x^2) : \frac{\beta^2}{\alpha}(\alpha X : X^2)$$

$$= (\alpha x + x^2) : (\alpha X + X^2) \text{ oder}$$

$$= x(\alpha + x) : X(\alpha + X) \text{ d. h.}$$

in der Hyperbel verhalten sich die Quadrate der Applikaten zu einander wie die Produkte aus beyden von den Applikaten abgeschnittenen Theilen auf der Hauptaxe.

§. 38.

Aufgabe.

Eine Gleichung für die Hyperbel finden, wenn die Abscissen auf der konjugirten Axe genommen werden.

Auflösung.

Rechnet man die Abscissen vom Mittelpunkt an, so war in Ansehung der Hauptaxe

$$y^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2}(x^2 - \tfrac{1}{4}\alpha^2).$$

Nun setze man umgekehrt $cf = x = dq = y$ und $fd = y = cq = x$, so hat man

$$x^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2}(y^2 - \tfrac{1}{4}\alpha^2) \text{ oder}$$

$$\alpha^2 x^2 = \beta^2 y^2 - \tfrac{1}{4}\alpha^2\beta^2 \text{ und}$$

$$\alpha^2 (x^2 + \beta^2) = \beta^2 y^2 \text{ daher}$$

$$y^2 = \frac{\alpha}{\beta^2}(x^2 + \beta^2).$$

§. 39.

Erklärung.

Wenn der Parameter folglich auch die konjugirte Axe der Hauptaxe gleich ist, so heißt die Hyperbel gleichseitig.

§. 40.

Zusatz.

Weil in der gleichseitigen Hyperbel $\alpha = \beta$ ist, so ergiebt sich

$$y^2 = x^2 - \tfrac{1}{4}\alpha^2$$

wenn die Abscissen vom Mittelpunkte angerechnet werden. Nimmt man aber den nächsten Scheitelpunkt zum Anfangspunkt der Abscissen an, so hat man für die gleichseitige Hyperbel

$$y^2 = \alpha x + x^2 \text{ (§. 36.)}.$$

§. 41.

Erklärung.

Man errichte aus b auf die Hauptaxe ab die Linie bn = der halben konjugirten Axe senkrecht auf, ziehe sodann durch den Mittelpunkt c und durch den Punkt n die gerade Linie cg, so pflegt man diese Linie die Asymptote der Hyperbel zu nennen. Auf eben diese Art lassen sich für die übrigen Zweige der Hyperbel die Asymptoten ziehen. Man kann kurz das Rechteck srmn zeichnen, und die Diagonalen rn, und ms ziehen, diese werden die Lagen der Asymptoten abgeben.

§. 42.

Zusatz.

Man ziehe durch einen beliebigen Punkt d in der Hyperbel die Linie gf mit nm parallel, so ist das Dreyeck cbn dem Dreyecke ctg ähnlich, und man hat

cb : bn = ct : tg.

Eben so sind auch die Dreyecke cbm und ctf einander ähnlich und es ist auch

cb : bm = ct : tf oder
cb : bn = ct : tf, folglich auch
ct : tg = ct : tf oder
ct : ct = tg : tf.

Weil nun ct = ct, so muß auch tg = tf seyn. Ferner ist td = te, folglich

tg — td = tf — te oder
dg = ef.

§. 43.

Zusatz.

Man ziehe bk mit fc und bl mit cn parallel, so hat man nb : nm = nk : nc. Weil nun nb = $\frac{1}{2}$nm, so muß auch nk = $\frac{1}{2}$nc, mithin kc = nk seyn. Ferner ist auch nb : nm = bk : mc oder nb : nm = bk : nc, und weil nb = $\frac{1}{2}$mn so hat man ebenfalls bk = $\frac{1}{2}$nc = nk = kc.

§. 44.

Lehrsatz.

Wenn durch einen beliebigen Punkt d in der Hyperbel die Linie gf mit mn parallel gezogen wird, so ist das Rechteck von fd × dg der Differenz der Quadrate $tg^2 - td^2$ gleich.

Beweis.

Man setze td = y und tg = z, so hat man dg = tg − td = z − y und df = dt + tf = dt + tg = z + y, mithin dg × df = (z − y)(z + y) = $z^2 - y^2 = tg^2 - td^2$.

§. 45.

Zusatz.

Wenn bt = x und cb = $\frac{1}{2}a$ gesetzet wird, so hat man ct = $\frac{1}{2}a + x$, und bn = $\frac{1}{2}\beta = \sqrt{\frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{2}p}$. Weil nun

cb : bn = ct : tg, so ist

$\frac{1}{2}a : \sqrt{\frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{2}p} = \frac{1}{2}a + x : tg$ mithin

$tg = ((\frac{1}{2}a + x).(\sqrt{\frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{2}p}) : \frac{1}{2}a$

$= \sqrt{\frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{2}p} + \frac{2x\sqrt{\frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{2}p}}{a}$ und

$tg^2 =$

$$tg^2 = \tfrac{1}{2}a \cdot \tfrac{1}{2}p + px + \frac{px^2}{a}.$$

Nun ist in der Hyperbel

$$td^2 = \frac{p}{a} \cdot (ax + x^2) \text{ (§. 35.)}$$

$$= px + \frac{px^2}{a}, \text{ folglich}$$

$$tg^2 - td^2 = \tfrac{1}{2}a \cdot \tfrac{1}{2}p$$
$$= \tfrac{1}{4}\beta^2 = bn^2.$$

§. 46.

Zusatz.

Je größer nun die Abscisse bt angenommen wird, desto größer wird die dazu gehörige Applikate td, desto kleiner aber muß auch dg werden, weil allemal $tg^2 - td^2 = bn^2$ ist. Hierauf folgt, daß zwar die Hyperbel der Asymptote immer näher kommen muß, aber nie damit zusammenfallen kann, weil sonst $tg^2 - td^2 = o$ seyn würde, folglich dem bewiesenen entgegen wäre. Dies ist auch die Ursache, warum die Linien cg, cf die Asymptoten (ἀσυμπτώτοι) genennet werden.

§. 47.

Zusatz.

Weil das Rechteck $fd \times dg = tg^2 - td^2$, so folgt, daß ein jedes Rechteck wie $fd \times dg$ dem Quadrate der halben konjugirten Axe gleich ist.

§. 48.

Aufgabe.

Eine Gleichung für die Hyperbel finden, wenn aus dem Mittelpunkte auf der einen Asymptote die Abscissen angenommen werden.

Auflösung.

Man nehme den Punkt d in der Hyperbel willkührlich an, ziehe durch selbigen die Linie di mit der andern Asymptote cf parallel, so wird ci eine Abscisse $=x$ und id die dazu gehörige Applikate $=y$. Ferner ziehe man durch d die Linie dv mit gc parallel, so erhält man drey unter sich ähnliche Dreyecke nemlich idg, dcf und nkb, und man hat

$bn : bk = gd : di$ und
$bn : nk = df : dc$ also auch
$bn^2 : bk.\ nk = gd.\ df : di.\ dc$ oder
$\frac{1}{4}\beta : bk.\ nk = \frac{1}{4}\beta^2 : di.\ ic$, folglich
$bk.\ nk = di.\ ic.$

Nun ist aber $bk = nk$ (§. 43.), mithin
$nk^2 = bk^2 = ck^2 = di.\ ic$ oder
$nk^2 = yx.$

Es ist demnach das Produkt aus der Abscisse in die dazu gehörige Applikate dem Quadrate einer beständigen Größe gleich.

§. 49.

Erklärung.

Das Quadrat der beständigen Größe kn pflegt man die Potenz der Hyperbel zu nennen.

§. 50.

Zusatz.

Weil das Dreyeck cnb bey b rechtwinklicht ist, so ergiebt sich

$$cn^2 = cb^2 + bn^2 \text{ oder}$$
$$(2kn)^2 = cb^2 + bn^2 \text{ oder}$$
$$4kn^2 = \tfrac{1}{4}\alpha^2 + \tfrac{1}{4}\beta^2 \text{ oder}$$
$$4kn^2 = \tfrac{1}{4}(\alpha^2+\beta^2) \text{ daher}$$
$$kn^2 = \tfrac{1}{16}(\alpha^2+\beta^2).$$

In der gleichseitigen Hyperbel ist $\alpha = \beta$, also wird

$$kn^2 = \tfrac{1}{16}(2\alpha^2) = \tfrac{1}{8}\alpha^2 \text{ oder}$$
$$kn^2 = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4}\alpha^2 \text{ d. h.}$$

In der gleichseitigen Hyperbel ist die Potenz der Hyperbel der Hälfte des Quadrats der halben Are gleich. In diesem letzten Falle ist nun der Winkel cnb = ncb = 45°, folglich steht bk senkrecht auf cn, mithin auch di senkrecht auf der Abscisse cg.

§. 51.

Zusatz.

Wenn die Abscissen auf der einen Asymptote genommen werden, und die Applikaten mit der andern parallel sind, so sind alle Parallellogramme aus zwey Koordinaten einander gleich.

§. 52.

Lehrsatz.

Wenn ein gerader Kegel durch eine Ebene geschnitten wird, so wird der Schnitt entweder ein Dreyeck oder ein Kreis, oder eine Ellipse oder eine Parabel oder eine Hyperbel.

Beweis.

Wenn der gerade Kegel durch die Axe geschnitten wird, so ist der Schnitt ein gleichschenklichtes Dreyeck. Geht aber der Schnitt mit der Grundfläche parallel, so wird er ein Kreis, wie schon aus der Elementargeometrie bewiesen wird. Schneidet man aber den Kegel so, daß der Schnitt beyde Seitenlinien ca und cb (Fig. 9.) trift, so ist der Schnitt eine Ellipse.

Man setze nemlich $fd = \delta$, $em = \varepsilon$, $de = \lambda$, $dg = x$ und $gh = y$. Weil em mit gk parallel ist, so ist das Dreyeck dgk dem Dreyecke dem ähnlich und man hat

$$de : em = dg : gk \text{ oder}$$
$$\lambda : \varepsilon = x : gk \text{ also}$$
$$gk = \frac{x\varepsilon}{\lambda}.$$

Ferner ist auch das Dreyeck egl dem Dreyeck edf ähnlich, und es ist

$$de : df = eg : gl \text{ oder}$$
$$\lambda : \delta = \lambda - x : gl \text{ also}$$
$$gl = \frac{\delta(\lambda - x)}{\lambda}.$$

Weil nun ih auf der Ebene des Dreyecks acb senkrecht steht, so hat man auch

$$kg : gh = gh : gl \text{ oder}$$
$$\frac{x\varepsilon}{\lambda} : y = y : \frac{\delta(\lambda - x)}{\lambda}, \text{ mithin}$$
$$y^2 = \frac{x\varepsilon}{\lambda}\left(\frac{\delta(\lambda - x)}{\lambda}\right) \text{ oder}$$

$y^2 =$

$$y^2 = \frac{\delta\lambda x\gamma}{\lambda^2} - \frac{\delta\gamma x^2}{\lambda^2} \text{ oder}$$

$$y^2 = \frac{\delta\gamma}{\lambda} \cdot x - \frac{\delta\gamma}{\lambda^2} \cdot x^2.$$

Man setze $\frac{\delta\gamma}{\lambda} = p$, so wird

$$y^2 = px - \frac{p}{\lambda} x^2 \text{ oder}$$

$$y^2 = \frac{p}{\lambda}(\lambda x - x^2).$$

Diese Gleichung ist derjenigen vollkommen gleich, welche für die Ellipse §. 22. gefunden ist.

Wenn der Schnitt so geschiehet, daß er gehörig erweitert die verlängerte Seite ac des Kegels (Fig. 10.) in m trift, so wird selbiger eine Hyperbel. Denn man setze $dm = \lambda$, $fd = \delta$, $mn = \gamma$, $dg = x$ und $hg = y$, so hat man die beyden ähnlichen Dreyecke ndm und dgk, also

$$dm : mn = dg : gk \text{ oder}$$
$$\lambda : \gamma = x : gk \text{ und}$$
$$gk = \frac{\gamma x}{\lambda}.$$

Auch die beyden Dreyecke mlg und mfd sind einander ähnlich, und es ist wiederum

$$md : df = mg : gl \text{ oder}$$
$$\lambda : \delta = \lambda + x : gl \text{ also}$$
$$gl = \frac{\delta(\lambda + x)}{\lambda}.$$

Ferner ist $kg : gh = gh : gl$ und
$gh^2 = kg \cdot gl$ oder

$$y^2 = \frac{\varepsilon x}{\lambda}\left(\frac{\delta(\lambda+x)}{\lambda}\right) \text{ oder}$$

$$y^2 = \frac{\varepsilon\lambda\delta x}{\lambda^2} + \frac{\delta\varepsilon x^2}{\lambda^2} \text{ oder}$$

$$y^2 = \frac{\varepsilon\delta}{\lambda}\cdot + \frac{\varepsilon\delta}{\lambda^2}\cdot x^2.$$

Setzt man nun $\frac{\varepsilon\delta}{\lambda} = p$, so hat man

$$y^2 = px + \frac{p}{\lambda}\cdot x^2$$

und diese Gleichung druckt die Gleichung für die Hyperbel aus.

Geht endlich der Schnitt des Kegels mit der einen Seite ac (Fig. 11.) parallel, so giebt er eine Parabel. Man setze $fd = \delta$, $ac = \varepsilon$ und $ab = \lambda$, $gd = x$ und $gh = y$. Die beyden ähnlichen Dreyecke cab und dgk geben

$$ca : ab = dg : gk \text{ oder}$$
$$\varepsilon : \lambda = x : gk \text{ und}$$
$$gk = \frac{\lambda x}{\varepsilon}.$$

Ferner ist $lg = fd = \delta$, also wird

$$gk : gh = gh : gl \text{ und}$$
$$gh^2 = gh.gl \text{ oder}$$
$$y^2 = \frac{\delta\lambda}{\varepsilon}\cdot x.$$

Man setze $\frac{\lambda\delta}{\varepsilon} = p$, so ist

$$y^2 = px$$

welche Gleichung die Gleichung der Parabel ausdruckt.

§. 52.

§. 53.

Zusatz.

Die krummen Linien, deren Natur bisher entwickelt worden, heißt man eben daher Kegelschnitte, weil sie aus Schnitten eines geraden Kegels welche nach verschiedenen Richtungen geschehen, erhalten werden. Es kann sich also auch der Kreis als ein Kegelschnitt betrachten lassen, und aus dem bisherigen wird es deutlich genug seyn, wie man alle Kegelschnitte unter eine einzige Gleichung bringen könne. Nimmt man nemlich den Anfangspunkt der Abscissen vom Scheitel an, so können der Kreis, die Ellipse, die Parabel und Hyperbel unter folgender Gleichung vorstellig gemacht werden

$$y^2 = px \mp \frac{p}{a} \cdot x^2.$$

Für die Ellipse ist $y^2 = px - \frac{p}{a} \cdot x^2$; für die Hyperbel $y^2 = px + \frac{p}{a} x^2$.

Ein Kreis läßt sich als eine Ellipse betrachten, in welcher beyde Brennpunkte zusammenfallen und der Parameter dem Durchmesser gleich ist. Es ist also für den Kreis $y^2 = ax - x^2$ und für die gleichseitige Hyperbel $y^2 = ax + x^2$.

Wenn p unverändert bleibt, aber a immer größer und größer wird, so wird der Bruch $\frac{p}{a}$ immer kleiner und verschwindet ganz, wenn a unendlich groß ist, alsdenn hat man

$$y^2 = px \mp o, x^2 = px.$$

Man

Man kann also eine Parabel als eine Ellip
oder als eine Hyperbel betrachten, deren Axe u
endlich groß ist.

§. 54.

Zusatz.

Wenn in der Ellipse, Hyperbel und in der
Kreise der Mittelpunkt zum Anfangspunkt der Ab
scissen angenommen wird, so läßt sich die Gle
chung für diese krummen Linien durch diese Gle
chung ausdrucken

$$y^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2}\left(\pm\tfrac{1}{4}\alpha^2 \mp x^2\right).$$

In dem Kreise ist $\alpha = \beta$, also wird

$$y^2 = \tfrac{1}{4}\alpha^2 - x^2.$$

In der gleichseitigen Hyperbel wird

$$y^2 = \tfrac{1}{4}\alpha^2 + x^2.$$

§. 55.

Erklärung.

Es sey akhfb (Fig. 12.) ein Halbkreis,
und die Linie cb sey auf dem Durchmesser ab in
b senkrecht gezogen; durch den Punkt a ziehe man
auf die unbestimmte Tangente cb verschiedene ge-
rade Linien ac, ad, ae u. s.; die Entfernungen des
Punktes a von den Punkten f, h, k u. s. trage
man aus c, d, e u. s. zurück nach g, h, l u. s.;
durch diese bestimmten Punkten g, h, l u. s. ziehe
man die krumme Linie aghm, so wird selbige eine
Zissoide genennt.

Man

Man kann sich vorstellen, daß die Zissoide in der Ebene abc also entstehe, daß sich die gerade Linie ac um den Punkt a so drehe, daß der Punkt g von der geraden bc eben so weit entfernet ist, als a von der halben Peripherie entfernet ist.

§. 56.

Zusatz.

Weil vermöge der Erklärung der Zissoide af = cg, so hat mnn auch af — fg = cg — fg oder ag = fc. Durch die Punkte g und f ziehe man die Linien gn und fp auf den Durchmesser senkrecht, so sind nun gn, fp und cb parallelle Linien und man hat

an : pb = ag : fc.

Weil nun ag = fc, so ist auch an = pb, mithin auch an + np = pb + np oder ap = bn, und daher pf = ni. Weil ferner ah = hd und die beyden Dreyecke ash und abd einander ähnlich sind, so ergiebt sich

ah : hd = as : sb,

mithin as = sb. Hieraus folgt, daß die Zissoide die halbe Peripherie in dem Punkte h in zwey gleiche Theile oder Quadranten schneide.

§. 57.

Zusatz.

Weil ap : pf = pf : pb, aber pf = ni und pb = an, so ist auch

ap : ni = ni : an, und ap : ni = an : ng,

folglich auch ni : an = an : ng.

Es sey $an = x$, $ng = y$ und $ni = \varrho$ so wird

$$\varrho : x = x : y \text{ also}$$

$$x^2 = y \cdot \varrho.$$

§. 58.

Aufgabe.

Eine Gleichung für die Zissoide zu finden.

Auflösung.

Man setze $ab = 2a$, $an = x$, $ng = y$, wird $nb = ap = 2a - x$, und $ni = pf = \sqrt{(2ax - x^2)}$ (§. 4.). Weil nun

$$ni : an = an : ng \text{ oder}$$

$$\sqrt{(2ax - x^2)} : x = x : y, \text{ so wird}$$

$$y = \frac{x^2}{\sqrt{(2ax - x^2)}} \text{ und}$$

$$y^2 = \frac{x^4}{2ax - x^2} \text{ und}$$

$$(2ax - x^2)\, y^2 = x^4 \text{ oder}$$

$$(2a - x)\, y^2 = x^3 \text{ also}$$

$$y^2 = \frac{x^3}{2a - x}.$$

Es ist also in der Zissoide der Würfel der Absciss dem Produkte aus dem Quadrate der Applikat in die Differenz des Durchmessers und der Ab- scisse gleich.

§. 59.

Zusatz.

Wenn $x = ab = 2a$ wird, so wird

$$y^2 = \frac{x^3}{0} \text{ und}$$

$$y = \frac{x}{0} \cdot \sqrt{x} = \infty \sqrt{x} \text{ d. h.}$$

Wenn

Wenn die Abscisse dem Durchmesser gleich ist, so wird die dazu gehörige Applikate unendlich groß, demnach kann die Zissoide mit der geraden Linie be nie zusammenkommen, daher ist be als die Asymptote der Zissoide zu betrachten.

§. 60.

Erklärung.

Es sey die gerade Linie ab (Fig. 13.) in Ansehung der Lage bestimmt, und ausserdem noch der Punkt c. Durch diesen Punkt c ziehe man auf ab die Linie cg senkrecht, und mache gh = gf. Ferner ziehe man noch durch den Punkt c verschiedene andere gerade Linien ci, cm u. s. welche die gerade ab in k, l u. s. schneiden werden, mache sodann ki = kd = gf = gh = le = lm u. s. und ziehe durch die Punkte f, d, e u. s. und h, i, m u. s. die krummen Linien him und fde, so nennt man eine solche Linie die Konchoide, und besonders fde die untere und him die obere.

Man kann sich vorstellen, daß die Konchoide also entstehe, wenn sich die gerade Linie ch in einer Ebene um den Punkt c also bewege, daß der Durchschnittspunkt g der geraden ch mit der geraden ab von gewissen Punkten auf beyden Seiten der Linie ab gleich weit entfernet bliebe.

§. 61.

Zusatz.

Man setze hr = x, und hg = a, so hat man rg = a − x = iq. Je größer also die Werthe

von

von x angenommen werden, desto kleiner wird a
x oder die senkrechte iq, folglich nähert sich
Konchoide der geraden ab immer mehr. Auf eb
diese Art erhellet, daß auch die senkrechte du
ständig abnehmen muß, wenn fp immer gröſ
wird, daher nähert sich auch die untere Konchoi
der geraden ab immer mehr, aber beyde Konch
den werden nie mit der geraden ab zusammenkom
men können, weil beständig dk = ki = gh bleib
muß, deswegens ist ab die Asymptote für beyd
Konchoiden.

§. 62.

Aufgabe.

Eine Gleichung für die Konchoide zu finden

Auflösung.

Man nehme ki = gh = α, gc = β, gr =
qi = x, und ri = gq = y, so hat man cr = cg +
gr = β + x. Weil nun gk mit ri parallel ist, s
sind die Dreyecke cgk und cri einander ähnlich
und es ergiebt sich

rg : ik = gc : ck oder

x : α = β : ck also ck = $\frac{\alpha\beta}{x}$,

hieraus erhält man ferner ci = ck + ki = $\frac{\alpha\beta}{x}$ + α

= $\frac{\alpha(\beta + x)}{x}$.

In dem rechtwinklichten Dreyecke cri ist weiter

$cr^2 + ri^2 = ci^2$ oder

(β+

$$(\beta+x)^2+y^2=\left(\frac{\alpha(\beta+x)}{x}\right)^2 \text{ und}$$

$$y^2=\left(\frac{\alpha(\beta+x)}{x}\right)^2-(\beta+x)^2 \text{ oder}$$

$$y^2=\frac{\alpha^2\beta^2+2\alpha^2\beta x+\alpha^2x^2-x^2\beta^2-2\beta x^3-x^4}{x^2}$$

oder

$$y^2=\frac{(\beta+x)^2(\alpha^2-x^2)}{x^2}$$

und dies ist die Gleichung für die obere Konchoide.

In der untern Konchoide sey $gf=\alpha=dk$, $gp=x=nd$, $pd=y=gn$ so hat man $cp=cg-pg=\beta-x$. Die beyden Dreyecke cgk und cpd sind einander ähnlich, und man hat

$gp:kd=cp:dc$ oder

$x:\alpha=\beta-x:dc$ und

$$dc=\frac{\alpha(\beta-x)}{x}.$$

In dem rechtwinklichten Dreyecke cpd ist nun

$pc^2+pd^2=cd^2$ oder

$$(\beta-x)^2+y^2=\left(\frac{\alpha(\beta-x)}{x}\right)^2 \text{ und}$$

$$y^2=\left(\frac{\alpha(\beta-x)}{x}\right)^2-(\beta-x)^2 \text{ oder}$$

$$y^2=\frac{\alpha^2\beta^2-2\alpha^2\beta x+\alpha^2x^2-\beta^2x^2+2\beta x^3-x^4}{x^2}$$

oder

$$y^2=\frac{(\beta-x)^2(\alpha^2-x^2)}{x^2}$$

und diese Gleichung druckt die Natur der untern Konchoide aus.

Man

Man kann beyde Gleichungen unter dieſe a
gemeine bringen:

$$y^2 = \frac{(C \pm x)^2 (a^2 - x^2)}{x^2}$$

wo das Zeichen + für die obere, — aber für d
untere Kochooide gehöret.

§. 63.

Erklärung.

Linien, deren Natur durch eine algebraiſch
Gleichung vorgeſtellet werden kann, in welcher di
beyden veränderlichen Größen x und y vorkom
men, heißen überhaupt algebraiſche Linien
Von dieſen giebt es auſſer den bisher betrachtete
noch eine unendliche Menge, indem ſogar eine jed
willkührlich angenommene Gleichung von zweye
veränderlichen Größen durch Linien konſtruiret wer
den kann. Weil nun eine ſolche angenommen
Gleichung theils vom erſten, theils vom zweyte
dritten und ferneren Grade ſeyn kann, ſo hat ma
auch die algebraiſchen Linien in verſchiedene Ord
nungen abgetheilet, welche allemal nach der größte
Anzahl der veränderlichen Faktoren in einem Glied
gerechnet werden.

§. 64.

Zuſatz.

Es gehören demnach die Kegelſchnitte zur
zweyten Ordnung, weil in keinem Satze mehr als
zwey veränderliche Faktoren vorkommen. In der
Ziſſoide war

$y^2 =$

$$y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$$

und in der Konchoide

$$y^2 = \frac{(\beta \pm x)^2 (a^2 - x^2)}{x^2} \text{ oder}$$

$$y^2 x^2 = (\beta \pm x)^2 (a^2 - x^2)$$

mithin gehöret die Zissoide zur dritten und die Konchoide zur vierten Ordnung. Wenn man die gerade Linie unter die algebraischen Linien rechnen will, so gehöret sie zur ersten Ordnung; demnach fangen erst die krummen Linien bey der zweyten Ordnung an. Es wird also die nte Ordnung der krummen Linien die (n — 1)te Ordnung der krummen Linien seyn.

§. 65.

Zusatz.

Man kann alle Linien von einerley Ordnung unter einer allgemeinen Gleichung vorstellen. So druckt die Gleichung $\alpha + \beta x + \gamma y = 0$ die Natur der Linien von der ersten Ordnung aus, und sie gehöret zur geraden Linie. Weil nun alle gerade Linien einander vollkommen ähnlich sind, so giebt es auch nur eine einzige Linie von der ersten Ordnung.

§. 66.

Zusatz.

Die Gleichung $\alpha + \beta x + \gamma y + \delta x^2 + \varepsilon xy + \zeta y^2 = 0$ stellt alle mögliche Linien von der zweyten

Ordnung vor, weil man darinn kein Glied antr welches über den zweyten Grad gehet. Es w bald gezeiget werden, daß es hier überhaupt n drey Linien von der zweyten Ordnung gebe.

§. 67.

Zusatz.

Ueberhaupt lassen sich die algebraischen Lini von einerley Ordnung im folgenden algebraisch oder analytischen Dreyecke deutlich darstellen:

$$\alpha$$
$$\beta x \mid \gamma y$$
$$\delta x^2 \mid \varepsilon xy \mid \zeta y^2$$
$$\vartheta x^3 \mid \iota x^2 y \mid \kappa x y^2 \mid \lambda y^3$$
$$\mu x^4 \mid \nu x^3 y \mid \xi x^2 y^2 \mid o x y^3 \mid \pi y^4$$
u. s. u. s.

Nimmt man nemlich die ersten drey Sätze, so ha man die Gleichung für die Linien der ersten Ord nung, nemlich $\alpha + \beta x + \gamma y = 0$.

Wenn man hierzu die drey folgenden Sätze setzet, so erhält man die Gleichung für die Linien der zweyten Ordnung, nemlich

$$\alpha + \beta x + \gamma y + \delta x^2 + \varepsilon xy + \zeta y^2 = 0 \text{ u. s.}$$

Will man eine allgemeine Gleichung für eine al gebraische Linie einer Ordnung entweder nach x oder nach y ordnen, so trift man in den schiefen Lagen des Dreyecks die Sätze, welche einerley Po tenz von x oder von y enthalten. Wollte man z. E. die Gleichung der Linien von der dritten Ord nung nach den Potenzen von x ordnen, so erhält man

$$\vartheta x^3 +$$

$$\begin{array}{l} yx^3 + \vartheta x^2 y + \iota xy^2 + ky^3 \\ + \delta x^2 \quad + \varepsilon xy + \zeta y^2 \\ \qquad + \beta x + \gamma y \\ \qquad\qquad + \alpha \end{array}$$

also $yx^3 + (\vartheta y + \delta) x^2 + (\iota y^2 + \varepsilon y + \beta) x + (ky^3 + \zeta y^2 + \gamma y + \alpha) = 0$.

Auf eben diese Weise liesse sich die Gleichung nach den Potenzen von y ordnen.

Man kann auch die algebraischen Linien durch folgendes analytische Parallellogramm vorstellig machen:

α | βx |	δx^2 |	ηx^3 |	λx^4 |	u. f.
γy | εxy |	$\vartheta x^2 y$ |	$\mu x^3 y$ |	$\tau x^4 y$ |	u. f.
ζy^2 | ιxy^2 |	$\nu x^2 y^2$ |	$\Phi x^3 y^2$ |	$\chi x^4 y^2$ |	u. f.
σy^3 | ϱxy^3 |	$\psi x^2 y^3$ |	$\omega x^3 y^3$ |	$\xi x^4 y^3$ |	u. f.

§. 68.

Zusatz.

Wenn eine vorgegebene Gleichung die Natur der algebraischen Linie einer höhern Ordnung ausdrucken soll, so wird erfordert, daß sie sich in keine rationalen Faktoren zerlegen lassen. Denn sollte sich die Gleichung in zwey oder mehrere rationale Faktoren zerlegen lassen, so würde ein jeder Faktor als eine besondere Gleichung anzusehen seyn, welche eine eigene Linie ausdruckt. Eine solche Gleichung kann daher ein ganzes System von mehreren Linien vorstellen, welche auf einerley Ebene beschrieben sind. Wäre z. E. die Gleichung $6y^2 - \frac{2}{3}xy + \frac{2}{3}x^2 = 0$ gegeben, so läßt sich selbige in die beyden rationalen Fakoren

$3x - \frac{2}{3}x = 0$ und

$2y - x = 0$ zerlegen.

Demnach ist in der gegebenen Gleichung

$3y = \frac{2}{3}x$ und

$2y = x$, also

$y = \frac{2}{9}x$ und

$y = \frac{1}{2}x$

Diese Gleichung läßt sich also vermittelst zweyer g rader Linien also konstruiren: Man ziehe die unb stimmte gerade Linie ab (Fig. 19.), nehme ac = und ziehe durch c die Linie cd unter einem belieb gen Winkel, und mache cd = 2. Nun ziehe ma durch a und d die gerade Linie af, nehme ae = x und mache ef mit cd parallel, so wird ef = y seyn Denn man hat

ac : cd = ae : ef oder

9 : 2 = x : y also $y = \frac{2}{9}x$.

Ferner nehme man ag = 2, und gh mit c parallel gezogen = 1, ziehe hierauf durch a und die gerade Linie ai, verlängere ef bis i, so wir auch ei = y seyn. Denn es ist wiederum

ag : gh = ae : ei oder

2 : 1 = x : y folglich

$y = \frac{1}{2}x$ wie verlangt wird.

Demnach gehören zu jeden x oder ae allemal zwe Werthe von y nemlich ef und ei, welche mittel der geraden Linien af und ai bestimmt werden.

Uebrigens wird bey einer jeden algebraischen Linie vorausgesetzet, daß

1. der Anfangspunkt der Abscissen
2. die Lage der Abscissenlinie und
3. der Koordinatenwinkel gegeben sind.

Weil man diese drey Stücke annehmen kann, wi man will, so sieht man leicht, daß für einerley al gebraischen Linie gar verschiedene Gleichungen ge

fun-

funden werden können, welche alle die Natur der algebraischen Linie bestimmen.

§. 69.

Zusatz.

Es sey mdn (Fig. 14.) eine algebraische krumme Linie, deren Natur durch irgend eine Gleichung gegeben ist, welche das Verhältniß der beyden Koordinaten ac und cd oder x und y ausdrucket. Es wäre also hier a der Anfangspunkt der Abscissen, ab die Abscissenlinie, und af die Applikatenlinie.

Gesetzt nun e sey ein anderer Anfangspunkt der Abscissen, el die Abscissenlinie und eg die Applikatenlinie, und der Koordinatenwinkel gel, welche Gestalt wird die Gleichung für den nemlichen Punkt der algebraischen Linie bekommen, wenn el = u und ld = z als die beyden neuen Koordinaten gezogen werden.

Man ziehe durch die Punkte e und l die Linien eh und lp mit af, und eß und lq mit ab parallel. Weil nun die Winkel in den Dreyecken leß und lqk und die Linien ah und eh gegeben sind, mithin auch das Verhältniß der Seitenlinien der Dreyecke bekannt ist, so setze man ah = p, eh = r, und es sey

le : eß = 1 : p oder
u : eß = 1 : p, mithin
eß = up.

Ferner sey el : lß = 1 : r oder
u : lß = 1 : r und
lß = ur.

Weiter sey $ld : dq = 1 : f$ oder
$z : dq = 1 : f$ und
$dq = zf$.
Endlich sey $ld : lq = 1 : t$ oder
$z : lq = 1 : t$ und
$lq = zt$.
Nun hat man $ac = ap - cp = ap - lq$
$= ah + hp - lq$
$= ah + e\beta - lq$
$x = \mu + up - zt$.
Ferner ist $cd = c\alpha + \alpha q + qd$ oder
$cd = he + \beta l + qd$ und
$y = \nu + ur + zf$.
Setzt man also in der gegebenen Gleichung st
x und y diese gefundenen Werthe, so erhält m
die neue Gleichung zwischen z und u, welche
die Natur ein und der nemlichen krummen Li
ausdrucket. Uebrigens kommt es noch auf die La
der Punkte a und e und der gegebenen Linien
eg, el und ab an, ob einige von den Größen
ν, p, r, f, t negativ sind.

§. 70.

Zusatz.

Die allgemeine Formel des vorigen §. begre
alle einzelne Fälle unter sich.

1. Werden die Abscissen aus ein und dem nem
lichen Punkte a (Fig. 15.) angerechnet,
wird sowohl eh als auch $ah = o$, weil n
die Punkte e und a zusammenfallen. De
nach wird $x = up - tz$ und $y = ur + fz$

2. Soll ganz allein die Lage der Abscissen verändert werden, so wird eh oder $v = o$, $ql = tz = o$ und $dq = dl = z$ (Fig. 16.), folglich $x = \mu + up$ und $y = ur + tz$.

3. Fangen die beyden Abscissen in einem einzigen Punkte a (Fig. 17.) an, und fallen in eine einzige gerade Linie zusammen, nur die Lagen der Applikaten sind verschieden, so wird nicht nur $q\alpha = o$ und $\alpha c = eh = o$, sondern auch das Dreyeck $e\beta l$ fällt in die gerade Linie ap und es wird $e\beta = up = u$, folglich $x = u - tz$ und $y = zf$.

4. Sollen allein die Anfangspunkte der Abscissen andere Lagen haben, sonst aber die Abscissen mit einander parallel laufen, so wird nun $ql = o$, $e\beta = up = u$, $qd = ld = zf = z$ und $l\beta = o$, mithin $x = \mu + u$ und $y = v + z$.

§. 71.

Zusatz.

Man mag die Lage der Anfangspunkte der Abscissen, der Abscissenlinie und die Größe der Koordinatenwinkel verändern wie man will, so wird die neue Gleichung von eben demselben Grade seyn, als die gegebene Gleichung war. Setzt man nemlich in der gegebenen Gleichung statt x und y die gleichen Werthe $\mu + up - tz$ und $v + ur + zf$, so hat die neue Gleichung eben so viele Dimensionen von u und z als die gegebene von x und y hat. Steigen demnach die veränderlichen Größen von x

und y auf höhere Potenzen, so müssen auch die veränderlichen Größen u und z auf eben die Potenzen und auf keine andere steigen, mithin wird auch der Grad der neuen Gleichung nicht geändert.

§. 72.

Erklärung.

Ausser der Eintheilung der algebraischen Linien in verschiedene Ordnungen theilet man sie noch in verschiedene Gattungen oder Familien ab. Man rechnet nemlich alle algebraische Linien zu einerley Familie, deren Gleichungen nur in Ansehung der Exponenten von einander verschieden sind. Gemeiniglich druckt man eine solche Familie von algebraischen Linien durch eine einzige allgemeine Gleichung aus, in welcher die Exponenten unbestimmte Zahlen sind.

§. 73.

Zusatz.

Weil die Sätze der Gleichungen der algebraischen Linien gemeiniglich gleich viele Dimensionen haben, die beständigen und veränderlichen Größen zusammengenommen, so muß auch die Summe der Exponenten in einem jeden Gliede der Gleichung für einerley Gattung der algebraischen Linien gleich groß seyn.

1. Die Gleichung $y^m = a^n x^{m-n} - x^m$ druckt die Familie der Kreise aus. Setzt man $m=2$, $n=1$,

$n = 1$, so wird $y^2 = ax - x^2$, mithin die Gleichung für den gemeinen Kreis. Ist aber $m = 3$ und $n = 1$, so erhält man $y^3 = ax^2 - x^3$ oder die Gleichung für den Kreis von der zweyten Gattung u. s. f.

2. Die Gleichung $y^m a^{m-n} x^n$ druckt die Familie der Parabeln aus. Ist $m = 2$ und $n = 1$, so erhält man die Gleichung für die gemeine Parabel $y^2 = ax$. Setzt man $m = 3$, $n = 1$, so wird $y^3 = ax^2$ oder die Gleichung für die Parabeln von der zweyten Gattung u. s. f.

3. Die Gleichung $y^m = p^n x^{m-n} - \frac{p}{a} \cdot x^m$

druckt die Familie der Ellipsen aus. Wenn $m = 2$ und $n = 1$ ist, so bekömmt man die Gleichung für die gemeine Ellipse $y^2 = px - \frac{p}{a} x^2$ u. s. f.

4. Die Gleichung $y^m = p^n x^{m-n} + \frac{p}{a} x^2$

druckt die Familie der Hyperbeln aus. Ist $m = 2$, $n = 1$, so ergiebt sich die Gleichung für die gemeine Hyperbel $y^2 = px + \frac{p}{a} x^2$ u. s. f.

5. Die Gleichung $x^n y^m = a^{n+m}$ druckt die Falie der Hyperbeln zwischen ihren Asymptoten aus. Setzt man $n = m = 1$, so erhält man die gemeine Gleichung der Hyperbel zwischen ihren Asymptoten $xy = a^2$ u. s. f.

§. 74.

Erklärung.

Wenn in der Gleichung einer krummen Linie eine beständige Größe vorkömmt, so pflegt man diese überhaupt den Parameter zu nennen. Sollte die Gleichung für die krumme Linie mehr als eine beständige Größe erhalten, so kann man sie alle auf eine einzige bringen. Wenn z. E. die Gleichung $\alpha x^3 = \beta y^2 - \gamma yx$ gegeben, so kann man setzen $\beta = \mu\alpha$, $\gamma = \nu\alpha$, wo μ und ν gewisse Zahlen bedeuten. Daraus ist klar, daß sich alle Parameter ein und der nemlichen krummen Linie auf einen einzigen reduciren lassen.

§. 75.

Zusatz.

Um die allereinfachsten Gleichungen für die krummen Linien zu erhalten, pflegt man auch wohl den Parameter, so wie den Halbmesser $= 1$ zu setzen.

Setzt man z. E. in der allgemeinen Gleichung für die Gattungen aller Parabeln $y^m = \alpha^{m-n} x^n$ den Parameter $\alpha = 1$, so wird

$$y^m = x^n \text{ und } y = x^{\frac{n}{m}}.$$

Es ist also auch diese Gleichung eine allgemeine Gleichung für alle Parabeln, wenn der Parameter $= 1$ gesetzet wird. Will man diese Gleichung wieder vollständig haben, so braucht man nur vor x die 1 zu setzen, und selbiger die Einheit weniger den Exponenten von x zum Exponenten zu geben; man erhält nemlich

$y = 1$

$$y = 1^{\frac{1-\frac{n}{m}}{}} \times^{\frac{n}{m}}$$

$$= 1^{\frac{m-n}{m}} \times^{\frac{n}{m}} \text{ und}$$

$$y^m = 1^{m-n} \times^{n}$$

Zweytes Kapitel.

Von den Tangenten, Subtangenten, Normalen, Subnormalen, und Diametern der Kegelschnitte.

§. 76.

Erklärung.

Eine gerade Linie eb (Fig. 20.), welche irgend einen Punkt b eines Kegelschnittes so trift, daß sie auf beyden Seiten des Punktes b gehörig verlängert die krumme Linie nicht schneidet, heißt eine **Berührungslinie** oder **Tangente** des Schnittes, und der Punkt b, welchen die krumme Linie und die Tangente gemein haben, der **Berührungspunkt**. In einem etwas engern Verstande versteht man unter der Tangente den Theil eb, welcher zwischen dem Berührungspunkte und der geraden Linie ef liegt. Durch den Berührungspunkt b ziehe man auf die Tangente die Linie bf senkrecht, bis sie die Axe af in dem Punkte f schneide, so nennt man selbige die **Normallinie** für

den

den Punkt b. Ferner lasse man auf die Axe el aus b die senkrechte Linie oder Applikate herab, so wird der Theil df zwischen der Normale bf und der Applikate bd die Subnormallinie und der Theil de zwischen der Applikate bd und der Tangente be die Subtangente genennt.

§. 77.

Aufgabe.

Es ist ein Punkt b (Fig. 21.) eines Kegelschnittes gegeben, man soll die Tangente für diesen Punkt geometrisch zeichnen.

1. Auflösung.

Für die Ellipse.

Man ziehe die beyden Vektoren bf und bg, verlängere bg nach h, so daß bh = bf wird, und halbire den Winkel hbf die Theilungslinie eb wird die verlangte Tangente seyn; oder man ziehe die gerade Linie hf, theile sie in k in zwey gleiche Theile und ziehe durch den Theilungspunkt k und durch den gegebenen Punkt b die gerade Linie el als die verlangte Tangente.

Beweis.

Man nehme in der verlängerten Linie el einen Punkt l nach Belieben an, ziehe die Linien lh, lf und lg, so erhellet, daß $lg + lh \geq gh$ oder $lg + lg \geq gb + bf$. Nun ist das Dreyeck hlk gleich und ähnlich dem Dreyeck lkf, folglich auch lh = lf, und daher $lg + lf \geq gb + bf$; demnach kann der Punkt l

nicht

nicht in der Ellipse liegen (§. 11.). Weil nun dieser Beweis von allen Punkten in der geraden Linie el gilt, so folgt, daß die gerade Linie el die Ellipse nur in dem einzigen Punkte b treffen könne.

Für die Hyperbel.

Man ziehe wiederum durch den Punkt b (Fig. 22.) die Vektoren bf und bg, nehme bh = bf, und halbire den Winkel hbf, die Theilungslinie eb wird die verlangte Tangente seyn, oder man halbire die gezogene Linie hf in k, und ziehe durch die Punkte k und b die verlangte Tangente eb.

Beweis.

Man nehme in der geraden Linie el den Punkt l willkührlich an, ziehe nach h u. f die Linien lh, lf, u. lg so ist das Dreyeck hlk = klf, mithin hl = lf. Ferner ist lg < lh + hg oder lg < gh + lf folglich lg — lf < gh; aber gh = gb — bf also auch lg — lf < gb — bf; demnach kann der Punkt l nicht in der Hyperbel liegen.

Für die Parabel.

Es sey ga die Abscissenlinie (Fig. 23.) ziehe den Vektor bf und bh mit ef parallel, und theile den Winkel hbf in zwey gleiche Theile, die Theilungslinie eb wird die verlangte Tangente seyn; oder auch man ziehe hf, theile sie in k in zwey Theile und ziehe durch k und b die Linie eb, welche die Tangente seyn wird.

Beweis.

Man nehme den Punkt l in der verlängerten eb willkührlich an, ziehe lh, lf und lg mit ef parallel, so erhellet, daß lg < lh, also auch lg < lf ist; demnach kann auch der Punkt l nicht in der Parabel liegen (§. 6.).

2. Auflösung.

Für die Ellipse.

Man ziehe die Radiivektoren bf und bg (Fig. 21.) und nehme auf dem grösten bg den Theil bi = bf, ziehe fi und hiermit die Linie eb *parallel*; *diese* Parallelle wird die verlangte Tangente seyn.

Beweis.

Man verlängere bf nach m, und mache bm = bg. Den Punkt l in eb nehme man willkührlich an, und ziehe aus selbigem die Linien lm, lf und lg. Weil nun bi = bf, mithin der Winkel bfi = bif = mbl (wegen eb ‡‡ fi) = ibl, so ist das Dreyeck bml = blg, und lg = lm. Wäre demnach l ein Punkt in der Ellipse, so würde erfordert, daß bf + bg = fl + lg = fl + lm seyn müsse. Es ist aber fb + bg = fb + bm = fm, mithin auch fm = fl + lm, welches unmöglich ist.

Für die Hyperbel.

Wenn die Radiivektoren bg und bf (Fig. 22.) gezogen sind, so verlängere man gb nach i und mache bi = bf; hierauf ziehe man fi, und hiermit

eb

eb parallel; diese Parallelle wird die verlangte Tangente seyn.

Beweis.

Man nehme den Punkt l in der geraden eb willkührlich an, mache bh = bf und ziehe lg, lh und lf. Weil nun bf = bi und eb mit fi parallel ist, so ist der Winkel mbl = kbf = hbk und lf = hl. Wäre also l ein Punkt in der Hyperbel, so wird erfordert, daß gb − bf = gl − lf = gl − lh = gh oder gl = gh + lh seyn müsse, welches aber unmöglich ist.

Für die Parabel.

Es sey ga die Abscissenlinie, li mit der Axe ef parallel, und bf der Vektor. Man nehme nun bi = bf, ziehe fi und hiermit die parallelle Linie eb, welche die Tangente seyn wird.

Beweis.

In der geraden Linie eb nehme man den Punkt l willkührlich an, ziehe lh, lf und lg mit ef parallel, so ist klar, daß lg < lh oder lg < lf; mithin kann auch l kein Punkt in der Parabel seyn.

§. 78.

Zusatz.

Die beyden Vektoren in den Kegelschnitten machen mit der verlängerten Tangente einerley Winkel. Denn weil eb parallel mit fi so ist der Winkel bfi = ebf und fib = ibl und wegen bfi = bif, auch abf = lbg.

§. 79.

Aufgabe.

Für den gegebenen Punkt b (Fig. 21. 22 23.) eines Kegelschnittes die Normale bn geom trisch zu ziehen.

Auflösung.

Man theile den Winkel fbi in zwey gleich Theile, die Theilungslinie bn wird die verlang Normale seyn.

Beweis.

Wenn für den Punkt b die Tangente gezo gen wird, so ist der Winkel ebf = lbi (§. 77.) Weil nun vermöge der Verzeichnung fbn = nbi so hat man auch fbn + ebf = nbi + lbi oder ebn = nbl d. h. bn ist auf der Tangente el in dem Punkte b senkrecht, mithin für den Punkt b die Normale.

§. 80.

Zusatz.

Wenn demnach für den Punkt b eine Nor male bn gezogen, und die Linie lb auf bn senkrech aufgerichtet wird, so ist zugleich el die Tangent für den Pukt b.

§. 81.

Zusatz.

Weil die Tangente eb eines Kegelschnittes allemal mit fi parallel gehet, so sieht man leicht, daß

1. der Winkel ifn dem Winkel ben, welchen die Tangente mit der Axe macht, gleich seyn muß, und daß dieser Winkel immer größer werde, und sich folglich einem rechten Winkel desto mehr nähere, je näher der Punkt b dem Scheitel a kommt; dagegen aber wird in solchem Falle die Tangente immer kleiner, und verschwindet gar, wenn der Punkt b auf dem Scheitel a fällt.

2. Je kleiner aber die beyden erwähnten Winkel werden, folglich je mehr sich der Punkt b von dem Scheitel a entfernet, desto größer wird die Tangente, und wird bey der Ellipse unendlich groß, wenn der Punkt b mit dem Scheitel der konjugirten Axe zusammenfällt.

§. 82.

Aufgabe.

Die Subnormallinie für einen jeden Kegelschnitt zu berechnen.

Auflösung.

Für die Ellipse.

Es sey für den Punkt b (Fig. 21.) die Linie bd die Applikate, eb die Tangente, bn die Normallinie, ed die Subtangente und dn die Subnormallinie. Nun theilet die Tangente eb den Winkel hbf in zwey gleiche Theile, und steht folglich auch hf senkrecht, weil bf = bh; demnach

läuft hf mit der Normale bn parallel, und man h

$$bg : bh = gf : nf \text{ oder}$$
$$bg + bf : bf = gf : nf.$$

Man setze die Hauptaxe $ap = \alpha$, und die Excen tricität $cg = cf = \varepsilon$, so wird

$$bg + bf = ap = \alpha \text{ und}$$
$$gf = gc + cf = 2gc = 2\varepsilon$$

Weil in dem Dreyecke fbg die Linie bd auf fg senk recht stehet, so ist

$$fg : fb + bg = bg - fb : dg - fd \text{ (§. 29. Tr}$$

aber $fg = 2\varepsilon$

$$fb + bg = \alpha \text{ und}$$
$$dg - fd = (fg - df) - df = fg - 2c$$
$$= 2cf - 2df = 2(cf - df) = 2cd,$$

mithin auch

$$fg : fb + bg = bg - fb : 2cd.$$

Werden die Abscissen aus dem Mittelpunkte can gerechnet, so ist $cd = x$, also $2cd = 2x$, und man hat

$$2\varepsilon : \alpha = bg - fb : 2x, \text{ also}$$
$$bg - fb = \frac{4\varepsilon x}{\alpha}. \text{ Nun ist}$$
$$bg + fb = \alpha, \text{ mithin}$$
$$2fb = \alpha - \frac{4\varepsilon x}{\alpha} \text{ und}$$
$$fb = \tfrac{1}{2}\alpha - \frac{2\varepsilon x}{\alpha}.$$

Die Werthe von $bg + bf$, fb, und gf in die Pro portion

$$bg + bf : bf = gf : nf \text{ gesetzt geben}$$
$$\alpha : \tfrac{1}{2}\alpha - \frac{2\varepsilon x}{\alpha} = 2\varepsilon : nf \text{ also}$$

nf =

$$nf = \frac{2\varepsilon\left(\frac{1}{2}a - 2\varepsilon x\right)}{a}$$

$$= \varepsilon - \frac{4\varepsilon^2 x}{a^2}$$

$$= \varepsilon - \frac{\varepsilon^2 x}{\frac{1}{4}a^2}.$$

Nun ist $nd = nf - fd$, und $fd = cf - cd = \varepsilon - x$, mithin

$$nd = \varepsilon - \frac{\varepsilon^2 x}{\frac{1}{4}a^2} - \varepsilon + x$$

$$= x - \frac{\varepsilon^2 x}{\frac{1}{4}a^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}a^2 x - \varepsilon^2 x}{\frac{1}{4}a^2}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{4}a^2 - \varepsilon^2\right)x}{\frac{1}{4}a^2}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2}a + \varepsilon\right)\left(\frac{1}{2}a - \varepsilon\right)x}{\frac{1}{4}a^2}.$$

Wenn man die konjugirte Axe $= \beta$ setzet, so ist

$$\left(\frac{1}{2}a + \varepsilon\right)\left(\frac{1}{2}a - \varepsilon\right) = \frac{1}{4}\beta^2 \text{ (§. 16.)}$$

folglich $nd = \frac{\beta^2 x}{a^2}$.

Soll der Anfangspunkt der Abscissen vom Scheitel a angerechnet werden, so nehme man $ad = x'$, und es ist $ac = ad + dc = x' + x = \frac{1}{2}a$, also $x = a\frac{1}{2} - x'$, und es wird

$$nd = \frac{\beta^2}{\alpha^2}(\tfrac{1}{2}\alpha - x') = \frac{\frac{1}{2}\beta^2}{\alpha} - \frac{\beta^2}{\alpha^2}.x'.$$

Wenn statt der kleinen Axe der Parameter gese
werden soll, so ist

$\alpha : \beta = \beta : p$, (§. 18.), mithin
$p\alpha = \beta^2$ und

$$nd = \tfrac{1}{2}p - \frac{p}{\alpha}.x'.$$

Für die Hyperbel.

Auch hier ist die Tangente eb (Fig. 22.) a
der Linie hf senkrecht, mithin ebenfalls hf mit d
Normallinie bn parallel und es ist

$gh : gf = hb : fn$ oder
$gb - bf : gf = bf : fn$.

Es sey die Hauptaxe $ap = \alpha$, die Eccentricit
$cf = cg = \varepsilon$, so hat man

$gb - bf = ap = \alpha$ und
$gf = 2cf = 2\varepsilon$.

Man nehme ferner $dq = df$, so hat man in de
Dreyecke gbq

$gq : gb + bq = gb - bq : gd - dq$ od
$gq : gb + bf = gb - bf : gd - fd$ od
$2(fc + fd) : gb + bf = gb - bf : gd - fd$

aber $gd - fd = gd - cd + cf = gf = 2cf$.
mithin

$2(cf + fd) : gb + bf = gb - bf : 2cf$.

Nun sey $cd = x$, so ist

$2x : gb + bf = a : 2\varepsilon$, und

$gb + bf = \frac{4\varepsilon x}{a}$, aber

$gb - bf = a$ folglich

$2bf = \frac{4\varepsilon x}{a} - a$ und

$bf = \frac{2\varepsilon x}{a} - \frac{1}{2}a$.

Setzt man diese gefundene Werthe in diese Proportion

$gb - bf : gf = bf : fn$, so ergiebt sich

$a : 2\varepsilon = \frac{2\varepsilon x}{a} - \frac{1}{2}a : fn$, und

$$fn = \frac{2\varepsilon\left(\frac{2\varepsilon x}{a} - \frac{1}{2}a\right)}{a}$$

$$= \frac{4\varepsilon^2 x}{a^2} - \varepsilon.$$

Nun ist $dn = fn - fd$, und $fd = cd - cf$, also $dn = fn - cd + cf$ oder

$$dn = \frac{4\varepsilon^2 x}{a^2} - \varepsilon - x + \varepsilon$$

$$= \frac{4\varepsilon^2 x}{a^2} - x \text{ oder}$$

$$dn = \frac{4\varepsilon^2 x}{a^2} - \frac{a^2 x}{a^2}$$

$$= \frac{\varepsilon^2 x - \frac{1}{4}a^2 x}{\frac{1}{4}a^2}$$

$$dn = \frac{(\varepsilon^2 - \frac{1}{4}\alpha^2)\, x}{\frac{1}{4}\alpha^2}$$

$$= \frac{(\varepsilon + \frac{1}{2}\alpha)(\varepsilon - \frac{1}{2}\alpha)}{\frac{1}{4}\alpha^2} \cdot x.$$

Der Hyperbel-Parameter sey = p, so ist $(\varepsilon + \frac{1}{2}\alpha)$ $(\varepsilon - \frac{1}{2}\alpha) = \frac{1}{2}\alpha\ \frac{1}{2}p$ (§. 31.), mithin wird

$$dn = \frac{\frac{1}{2}\alpha \cdot \frac{1}{2}p}{\frac{1}{4}\alpha^2} \cdot x$$

$$= \frac{p}{\alpha} \cdot x.$$

Sollen die Abscissen von dem nächsten Scheite angerechnet werden, so sey $ad = x'$; alsdenn ha man $cd = ca + ad$ oder $x = \frac{1}{2}\alpha + x'$, und

$$dn = \frac{p}{\alpha}(\tfrac{1}{2}\alpha + x')$$

$$= \tfrac{1}{2}p + \frac{px'}{\alpha}.$$

Will man statt dem Parameter die konjungirte Axe gebrauchen, so ist

$\alpha : \beta = \beta : p$, und

$\beta^2 = \alpha \cdot p$ folglich

$p = \frac{\beta^2}{\alpha}$, und es wird

$$dn = \frac{\beta^2}{2\alpha} + \frac{\beta^2 x'}{\alpha^2} \text{ oder}$$

$$dn = \frac{\beta^2}{\alpha^2} \cdot x.$$

Für die Parabel

Weil hb (Fig. 23.) mit an und hf mit der Normale bn parallel ist, so ist hfnb ein Parallelogramm, folglich bh = fn; aber auch

bh = ad, also
ad = fn und
ad − fd = fn − fd oder
af = dn.

Der Parabel-Parameter sey = p, folglich $\frac{1}{2}p$ = af, also auch

$\frac{1}{2}p = dn$.

Rechnet man demnach den Anfangspunkt der Abscissen vom Scheitel an, so lassen sich die Subnormalen aller Kegelschnitte unter folgende allgemeine Gleichung bringen

$$dn = \frac{1}{2}p \mp \frac{px'}{a}$$

wo das Zeichen − für die Ellipse und + für die Hyperbel gehöret. In der Parabel ist a unendlich groß, mithin $\frac{px'}{a} = 0$, und

$dn = \frac{1}{2}p$.

§. 83.

Zusatz.

In der Parabel ist die Subnormallinie allemal eine beständige Größe, weil sie dem halben Parameter gleich ist. In der Ellipse hingegen ist die Subnormale kleiner und in der Hyperbel größer als der halbe Parameter.

§. 84.

§. 84.

Aufgabe.

Die Subtangente für einen jeden Punkt ei
nes Kegelschnittes zu finden.

Auflösung.

Für die Ellipse und Hyperbel.

Weil die Normallinie bn (Fig. 21. 22.
auf der Tangente eb senkrecht steht, so schliesse
die Tangente, die Normallinie und der Theil e
der Axe ein rechtwinklichtes Dreyeck ein. Nun i
bd senkrecht auf en, also hat man

$$dn : db = db : de$$

$$\tfrac{1}{2}p \mp \frac{px}{a} ; y = y : de.$$

Ferner ist in der Ellipse und Hyperbel

$$y^2 = \frac{p}{a}(ax \mp x^2)$$ (§. 22. 35.) mithin

$$y = \sqrt{\left(\frac{p}{a}(ax \mp x^2\right)}$$ oder

$$y = \sqrt{\left(\frac{apx \mp px^2}{a}\right)}$$; also

$$\tfrac{1}{2}p \mp \frac{px}{a} : \sqrt{\left(\frac{apx \mp px^2}{a}\right)} = \sqrt{\left(\frac{apx \mp px^2}{a}\right)} : d$$

und $\frac{apx \mp px^2}{a} = (\tfrac{1}{2}p \mp \frac{px}{a})de$ oder

$$apx \mp px^2 = (\tfrac{1}{2}ap \mp px)\,de \text{ oder}$$

$$ax \mp x^2 = (\tfrac{1}{2}a \mp x)\,de, \text{ mithin}$$

$$de = \frac{ax \mp x^2}{\tfrac{1}{2}a \mp x}$$

Für

Für die Parabel.

In dem rechtwinklichten Dreyecke ebn (Fig. 23.) hat man

$$dn : db = db : de \text{ oder}$$
$$\tfrac{1}{2}p : y = y : de.$$

Es ist aber $y^2 = px$, also $y = \sqrt{px}$, und

$$\tfrac{1}{2}p : \sqrt{px} = \sqrt{px} : de, \text{ also}$$
$$de = \frac{px}{\frac{1}{2}p} = x : \tfrac{1}{2} = 2x.$$

§. 85.

Zusatz.

Aus der Gleichung $de = \frac{ax \mp x^2}{\frac{1}{2}a \mp x}$ findet man auch

$$(\tfrac{1}{2}a \mp x)\, de = ax \mp x^2 = x(a \mp x)$$

mithin $\tfrac{1}{2}a \mp x : x = a \mp x : de$ d. h.

bey der Ellipse oder Hyperbel verhält sich die Differenz oder die Summe der halben Hauptaxe und der Abscisse zur Abscisse, wie die Differenz oder Summe der ganzen Hauptaxe und der Abscisse zur Subtangente.

In der Parabel ist die Subtangente allemal der doppelten Abscisse gleich. Hieraus ist es begreiflich, wie für einen jeden Punkt der Parabel eine Tangente sehr leicht gezogen werden kann: man lasse nemlich aus dem gegebenen Punkte b der Parabel die senkrechte Linie bd auf die Hauptaxe herab, nehme sodann me = md und ziehe durch e und b die gerade Linie cb, welche für den Punkt die Tangente seyn wird.

§. 86.

Zusatz.

Die Gleichung $de = \frac{ax \mp x^2}{\frac{1}{2}a \mp x}$ giebt auch

$$de = \frac{2ax \mp x^2}{a \mp 2x} = \frac{2x(a \mp x)}{a \mp 2x},$$ mithin

$(a \mp 2x)\, de = 2x\,(a \mp x)$ und

$a \mp 2x : 2x = a \mp x : de.$

Weil nun in der Ellipse $a - x > a - 2x$, so ist auch $de > 2x$, hingegen in der Hyperbel, wo $a + x < a + 2x$, ist $de < 2x$. Demnach ist in der Ellipse die Subtangente allemal größer und in der Hyperbel kleiner als die gedoppelte Abscisse.

§. 87.

Zusatz.

Wenn die Abscisse x verschwindet, oder $= o$ wird, so ergiebt sich in der Ellipse und Hyperbel

$$de = \frac{o}{\frac{1}{2}a} = o;$$

aber auch in der Parabel wird $de = 2x = o$ d. h. die Subtangente für die Scheitelpunkte aller Kegelschnitte verschwindet.

§. 88.

Zusatz.

In der Ellipse und Hyperbel ist $ae = de -$

$$da = \frac{ax \mp x^2}{\frac{1}{2}a \mp x} - x$$

=

$$= \frac{\alpha x \mp x^2 - \frac{1}{2}\alpha x \pm x^2}{\frac{1}{2}\alpha \mp x}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\alpha x}{\frac{1}{2}\alpha \mp x}$$, und daher

$ae(\frac{1}{2}\alpha \mp x) = \frac{1}{2}\alpha x$, demnach

$\frac{1}{2}\alpha \mp x : x = \frac{1}{2}\alpha : ae$ d. h.

die Differenz oder Summe der halben Hauptaxe und der Abscisse verhält sich zur Abscisse wie die halbe Hauptaxe zu dem Theil der Subtangente ae.

§. 89.

Zusatz.

Wenn $x = o$ oder auch $= \pm\alpha$ wird, so wird auch $ae = o$. Für $x = \frac{1}{2}\alpha$ wird ae in der Ellipse unendlich groß.

§. 90.

Zusatz.

In der Ellipse und Hyperbel hat man $ec = ca \pm ae$, mithin

$$ec = \frac{1}{2}\alpha \pm \frac{\alpha x}{\alpha \mp 2x} = \frac{\frac{1}{2}\alpha^2}{\alpha \mp 2x} = \frac{\frac{1}{4}\alpha^2}{\frac{1}{2}\alpha \mp x}$$

und $ec\frac{1}{2}(\alpha \mp x) = \frac{1}{4}\alpha^2$; demnach

$\frac{1}{2}\alpha \mp x : \frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{2}\alpha : ec$ oder

$cd : ca = ca : ec$. Es ist also

ec die dritte Proportionallinie zu cd und ca. Hieraus erhellet, daß der Punkt e, in welchem eine Tangente für den bestimmten Punkt b der krummen Linie die Hauptaxe schneidet, gefunden werden kann.

§. 91.

Aufgabe.

Für einen gegebenen Punkt eines Kegelschnittes die Normale und die Tangente zu berechnen.

Auflösung.

In dem rechtwinklichten Dreyecke (Fig. 21. 22.) ebd hat man

$$eb^2 = ed^2 + db^2, \text{ folglich}$$

$$eb = \sqrt{(ed^2 + db^2)}. \text{ Es ist aber}$$

$$ed = \frac{ax \mp x^2}{\frac{1}{2}a \mp x}, \text{ mithin}$$

$$ed^2 = \frac{(ax \mp x^2)^2}{(\frac{1}{2}a \mp x)^2}, \text{ und}$$

$$db^2 = y^2 = px \mp \frac{px^2}{a}, \text{ also}$$

$$eb = \sqrt{\left(\left(\frac{xa \mp x^2}{\frac{1}{2}a \mp x}\right)^2 + px \mp \frac{px^2}{a}\right)} \text{ (§. 84.)}$$

$$= \sqrt{\left(\left(\frac{ax \mp x^2}{\frac{1}{2}a \mp x}\right)^2 + \frac{apx \mp px^2}{a}\right)}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{(ax \mp x^2)^2}{\frac{1}{2}a \mp x} + \frac{(\frac{1}{2}a \mp x)^2(ax \mp x^2)p}{a\,(\frac{1}{2}a \mp x)^2}\right)}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{a(ax \mp x^2)^2 + (\frac{1}{2}a \mp x)^2(ax \mp x^2)p}{a.\,(\frac{1}{2}a \mp x)^2}\right)}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{(a(ax \mp x^2) + p(\frac{1}{2}a \mp x)^2).(ax \mp x^2)}{a.\,(\frac{1}{2}a \mp x)^2}\right)}$$

In der Parabel wird

$$ed^2 = bd^2 + ed^2 \text{ und}$$

$$ed = \sqrt{(bd^2 + ed^2)} \text{ oder}$$

$$ed = \sqrt{(px + 4x^2)}.$$

In

In dem rechtwinklichten Dreyecke bdn (Fig. 21. 22.) hat man ferner

$$bn^2 = bd^2 \mp dn^2 \text{ und}$$

$$bn = V(bd^2 \mp dn^2) \text{ also}$$

$$bn = V(px \mp \frac{px^2}{a} + (\tfrac{1}{2}p \mp \frac{px}{a})^2)$$

$$= V(\frac{a^2px \mp apx^2 + \tfrac{1}{4}p^2a^2 \mp ap^2x + p^2x^2}{a^2})$$

$$= V(\frac{p(p(\tfrac{1}{2}a \mp x)^2 \mp ax(a \mp x))}{a^2}).$$

Für die Parabel wird

$$bn = V(\tfrac{1}{4}p^2 + px) = V\frac{p^2 + 4px}{4}$$

$$= \tfrac{1}{2}V(p(p \mp 4x).$$

§. 92.

Zusatz.

Wird $x = o$ oder auch $= \mp \tfrac{1}{2}a$ so wird auch die Tangente $eb = o$, mithin verschwinden die Tangenten aller Kegelschnitte an den Scheitelpunkten. Hingegen für $x = o$ oder auch in der Ellipse und Hyperbel $= \pm a$ wird die Normale $= \tfrac{1}{2}p$.

§. 93.

Lehrsatz.

Wenn für den gegebenen Punkt b (Fig. 24.) der Hyperbel zwischen ihren Asymptoten die Tangente ad gezogen wird, so sind alsdenn allemal die Theile ab und bd gleich.

Beweis.

Man nehme den Punkt f in der Hyperbe willkührlich an, und ziehe durch selbigen die Linie eh mit der Tangente ad parallel. Durch die Punkte f und g ziehe man mk und ln auf die Axe der Hyperbel senkrecht, so erhält man die beyden ähnlichen Dreyecke efm und egl, und man hat

$$ef : eg = mf : lg.$$

Ferner geben auch die beyden ähnlichen Dreyecke gnh und fkh

$$fh : gh = fk : gn, \text{ folglich}$$
$$ef.fh : eg.gh = mf.fk : lg.gn.$$

Es ist aber $mf.fk = lg.gn$ (§. 47.) demnach

$$ef.fh = eg.gh \text{ oder}$$
$$ef(fg + gh) = (ef + fg)\,gh \text{ oder}$$
$$ef.fg + ef.gh = ef.gh + fg.gh \text{ und}$$
$$ef.fg = fg.gh, \text{ daher}$$
$$ef = gh.$$

Wenn man nun annimmt, daß $fg = o$ wird, so fällt ef auf ab und gh auf bd mithin $ab = bd$.

§. 94.

Zusatz.

Man ziehe durch b die Linie op bis an die Assymptoten auf der Axe senkrecht, so ist das Dreyeck abo dem Dreyecke efm ähnlich und es ergiebt sich

$$ab : bo = ef : fm;$$

ferner ist auch das Dreyeck bpd dem Dreyecke fkh ähnlich, mithin auch

$$bd : bp = fh : fd \text{ oder}$$
$$ab : bp = fh : fd, \text{ und daher}$$
$$ab^2 : bo.pb = ef.fh : fm.fd.$$

Nun

Nun ist aber bo. pb = fm. fk, mithin auch

$ab^2 = ef. fh$ d. h.

wenn durch einen willkührlichen Punkt der Hyperbel eine Linie eh mit der Tangente ad parallel gezogen wird, so ist allemal das Rechteck ef. fh dem Quadrate der halben Tangente ab^2 gleich.

§. 95.

Zusatz.

Man ziehe durch den Mittelpunkt c der Axe und durch den Punkt b, zu welchem die Tangente ad gehöret, die Linie ci, so hat man wegen der Aehnlichkeit der Dreyecke cba und cie, und cbd und cih

ci : ie = cb : ba und

ci : ih = cb : bd, mithin auch

ie : ba = ih : bd.

Weil nun ba = bd, so ist auch ie = ih. Ferner ist fe = gh, folglich

ie — fe = ih — gh oder

fi = ig d. h.

Wenn durch einen willkührlichen Punkt f der Hyperbel die Linie eh mit der Tangente ad parallel, und durch den Mittelpunkt c und dem Punkte b der Tangente ad die Linie ci gezogen wird, so theilet diese nicht nur die Linie eh, sondern auch fg in zwey gleiche Theile.

§. 95.

Erklärung.

Eine gerade Linie, welche durch irgend einen Punkt eines Kegelschnittes und durch den Mittelpunkt

punkt desselben gehet, heißt ein Diameter de Kegelschnittes. Es wird also der Diameter eine Ellipse so wie beym Kreise völlig begränzt, be der Hyperbel aber unendlich große syn. Weil be der Parabel eigentlich kein Mittelpunkt statt ha man sich selbigen aber als unendlich weit vorstelle kann, so wird auch der Diameter als unendlic groß anzusehen seyn mithin mit der Axe paralle gehen. Es sey nun aghf (Fig. 25.) eine Ellips und bd ein Diameter derselben, durch den Schei tel b des Diameters sey die Tangente be, un hiermit der Diameter fg parallel gezogen, so sag man dieser Diameter sey dem ersten bd zugeord net oder mit selbigen konjugirt. Sucht man z dem ersten und konjugirten Diameter die dritte Pro portionallinie, so heißt selbige der Parameter de ersten Diameters. ci sey ein aus dem Mittelpunkt c angenommener willkührlicher Theil als eine Ab scisse des Diameters, und man ziehe durch i di Linie kl mit der Tangente eb parallel, so ist k oder il die zur Abscisse ci gehörige Applikate.

§. 96.

Aufgabe.

Eine Gleichung für die Ellipse zu finden, wenn die Abscissen auf dem Diameter bd genommen wer den, und die Applikaten mit der Tangente eb pa rallel gehen.

1. Auflösung.

Wenn man den Anfangspunkt der Abscissen in dem Mittelpunkte annimmt; so setze man

cB=

$cm = x$
$mb = y$
$ha = a$
$cn = \delta$
$on = \lambda$

so hat man $am = ac - mc = \frac{1}{2}a - x$
$ao = ac - co = ac - cn - no$
$= \frac{1}{2}a - \delta - \lambda$
und $oh = oc + ch = \frac{1}{2}a + \delta + \lambda$.

Die beyden ähnlichen Dreyecke ebm und ikq geben
$em : mb = kq : iq$ oder
$em : mb = on : iq$.

Nun hat man in der Ellipse
$ac - am : ah - am = am : em$ (§. 85.)
oder $cm : mh = am : em$
oder $x : \frac{1}{2}a + x = \frac{1}{2}a - x : em$, mithin
$em = \frac{\frac{1}{4}a^2 - x^2}{x}$.

Setzt man nun diese Werthe in die Proportion
$em : mb = on : qi$, so hat man
$\frac{\frac{1}{4}a^2 - x^2}{x} : y = \lambda : qi$, mithin

$$qi = \frac{xy\lambda}{\frac{1}{4}a^2 - x^2}.$$

Ferner erhält man in den beyden ähnlichen Drey-ecken cmb und cin
$em : mb = cn : ni$ oder
$x : y = \delta : ni$, mithin
$$ni = \frac{\delta y}{x}.$$

Nun ist $ok = nq = ni - qi$

$$= \frac{\delta y}{x} - \frac{xy\lambda}{\frac{1}{4}a^2 - x^2}$$

$$= y\left(\frac{\delta}{x} - \frac{x\lambda}{\frac{1}{4}a^2 - x^2}\right).$$

In der Ellipse war

$ok^2 : mb^2 = ao \times oh : am \times mh$ (§. 23

aber $ao \times oh = (\frac{1}{2}a - \delta - \lambda) \times (\frac{1}{2}a + \delta + \lambda)$

$= (\frac{1}{4}a^2 - (\delta + \lambda)^2)$

$am \times mh = (\frac{1}{2}a - x)(\frac{1}{2}a + x)$

$= \frac{1}{4}a^2 - x^2$; mithin

$$y^2\left(\frac{\delta}{x} - \frac{x\lambda}{\frac{1}{4}a^2 - x^2}\right)^2 : y^2 = \left(\frac{1}{4}a^2 - (\delta + \lambda)^2\right)$$

$\frac{1}{4}a^2 - x^2$ oder

$$\left(\frac{\delta}{x} - \frac{x\lambda}{\frac{1}{4}a^2 - x^2}\right)^2 : 1 = \left(\frac{1}{4}a^2 - (\delta + \lambda)^2\right)$$

$\frac{1}{4}a^2 - x^2$ od

$$\frac{(\delta(\frac{1}{4}a^2 - x^2) - x^2\lambda)^2}{x^2 \quad (\frac{1}{4}a^2 - x^2)^2} : 1 = (\frac{1}{4}a^2 - (\delta + \lambda)^2)$$

$\frac{1}{4}a^2 - x^2$ un

$$\frac{(\delta(\frac{1}{4}a^2 - x^2) - x^2\lambda)^2}{x^2(\frac{1}{4}a^2 - x^2)} = (\frac{1}{4}a^2 - (\delta + \lambda)^2)$$ od

$$\frac{1}{4}a^2 - \delta^2 - 2\delta\lambda - \lambda^2 = \frac{\delta^2(\frac{1}{4}a^2 - x^2)^2 - 2\delta x^2\lambda(\frac{1}{4}a^2 - x^2) + x^4\lambda^2}{x^2(\frac{1}{4}a^2 - x^2)}$$

$$\frac{1}{4}a^2 - \delta^2 - 2\delta\lambda - \lambda^2 = \frac{\delta^2(\frac{1}{4}a^2 - x^2)}{x^2} - 2\delta\lambda + \frac{\lambda^2x^2}{\frac{1}{4}a^2 - x^2}$$

$$\frac{1}{4}a^2 - \delta^2 - 2\delta\lambda - \lambda^2 = \frac{\delta^2 \cdot \frac{1}{4}a^2}{x^2} - \delta^2 - 2\delta\lambda + \frac{\lambda^2x^2}{\frac{1}{4}a^2 - x^2}$$

$$\frac{1}{4}a^2 - \lambda^2 = \frac{\delta^2 \cdot \frac{1}{4}a^2}{x^2} + \frac{\lambda^2x^2}{\frac{1}{4}a^2 - x^2}.$$

Man nehme $ci = o$, so wird nun ki mit fc, ko mit fp, no mit cp zusammenfallen und $cn = o$ werden; alsdenn giebt

$\frac{1}{4}a^2 -$

$$\tfrac{1}{4}a^2 - \lambda^2 = \frac{\lambda^2 x^2}{\tfrac{1}{4}a^2 - x^2} \text{ oder}$$

$$\tfrac{1}{4}a^2(\tfrac{1}{4}a^2 - x^2) - \lambda^2(\tfrac{1}{4}a^2 - x^2) = \lambda^2 x^2 \text{ oder}$$

$$\tfrac{1}{16}a^4 - \tfrac{1}{4}a^2x^2 - \tfrac{1}{4}a^2\lambda^2 + \lambda^2x^2 = \lambda^2x^2 \text{ und}$$

$$\tfrac{1}{16}a^4 - \tfrac{1}{4}a^2x^2 - \tfrac{1}{4}a^2\lambda^2 = 0 \text{ oder}$$

$$\tfrac{1}{4}a^4 - a^2x^2 - a^2\lambda^2 = 0 \text{ und}$$

$$\tfrac{1}{4}a^2 - x^2 - \lambda^2 = 0 \text{ und}$$

$$\tfrac{1}{4}a^2 - x^2 = \lambda^2 \text{ oder}$$

$$(\tfrac{1}{2}a - x)(\tfrac{1}{2}a + x) = \lambda^2 = cp^2.$$

Man setze nun $bd = \alpha'$, $ci = x'$ und $ik = y'$ u. $fg = \beta'$. so ergiebt sich vermöge der beyden ähnlichen Dreyecke cbm und cin

$cb : ci = cm : cn$ oder

$\tfrac{1}{2}\alpha' : x' = x : \delta$ und

$$\delta = \frac{x \cdot x'}{\tfrac{1}{2}\alpha'}, \text{ daher}$$

$$\delta^2 = \frac{x^2 x'x'}{\tfrac{1}{4}\alpha'\alpha'}.$$

Auch die beyden Dreyecke cpf und kqi sind einander ähnlich, und man hat

$ki : kq = cf : cp$ oder

$y' : \lambda = \tfrac{1}{2}\beta' : cp$ und

$$cp = \frac{\tfrac{1}{2}\beta' \cdot \lambda}{y'} \text{ daher}$$

$$cp^2 = \frac{\tfrac{1}{4}\beta'\beta' \cdot \lambda^2}{y'y'}.$$

Nun war auch $cp^2 = \tfrac{1}{4}a^2 - x^2$, mithin

$$\frac{\tfrac{1}{4}\beta'\beta'\lambda^2}{y'y'} = \tfrac{1}{4}a^2 - x^2 \text{ und}$$

$$\lambda^2 = \frac{(\tfrac{1}{4}a^2 - x^2)\, y'y'}{\tfrac{1}{4}\beta'\beta'}.$$

Setzt man nun in die oben gefundene Gleichung

$$\tfrac{1}{4}a^2 - \lambda^2 = \frac{\delta^2 \cdot \tfrac{1}{4}a^2}{x^2} + \frac{\lambda^2 x^2}{\tfrac{1}{4}a^2 - x^2}$$

statt δ^2 und λ^2 die eben gefundenen Werthe, ergiebt sich

$$\tfrac{1}{4}a^2 - \frac{(\tfrac{1}{4}a^2 - x^2)y'y'}{\tfrac{1}{4}\beta'\beta'} = \frac{\tfrac{1}{4}a^2 \cdot x^2 x'x'}{\tfrac{1}{4}\alpha'\alpha' x^2} + \frac{(\tfrac{1}{4}a^2 - x^2)y'y'}{\tfrac{1}{4}\beta'\beta'(\tfrac{1}{4}a^2 - x^2)}$$

oder

$$\tfrac{1}{4}a^2 - \frac{(\tfrac{1}{4}a^2 - x^2)y'y'}{\tfrac{1}{4}\beta'\beta'} = \frac{\tfrac{1}{4}a^2 x'x'}{\tfrac{1}{4}\alpha'\alpha'} + \frac{y'y'x^2}{\tfrac{1}{4}\beta'\beta'} \text{ oder}$$

$$\tfrac{1}{4}a^2 - \frac{\tfrac{1}{4}a^2 y'y'}{\tfrac{1}{4}\beta'\beta'} + \frac{x^2 y'y'}{\tfrac{1}{4}\beta'\beta'} = \frac{\tfrac{1}{4}a^2 x'x'}{\tfrac{1}{4}\alpha'\alpha'} + \frac{y'y'x^2}{\tfrac{1}{4}\beta'\beta'} \text{ oder}$$

$$\tfrac{1}{4}a^2 - \frac{\tfrac{1}{4}a^2 y'y'}{\tfrac{1}{4}\beta'\beta'} = \frac{\tfrac{1}{4}a^2 x'x'}{\tfrac{1}{4}\alpha'\alpha'} \text{ oder}$$

$$1 - \frac{y'y'}{\tfrac{1}{4}\beta'\beta'} = \frac{x'x'}{\tfrac{1}{4}\alpha'\alpha'} \text{ oder}$$

$$\frac{y'y'}{\tfrac{1}{4}\beta'\beta'} = 1 - \frac{x'x'}{\tfrac{1}{4}\alpha'\alpha'}$$

$$= \frac{\tfrac{1}{4}\alpha'\alpha' - x'x'}{\tfrac{1}{4}\alpha'\alpha'} \text{ und}$$

$$y'y' = \frac{\tfrac{1}{4}\beta'\beta'}{\tfrac{1}{4}\alpha'\alpha'}(\tfrac{1}{4}\alpha'\alpha' - x'x') \text{ oder}$$

$$y'y' = \frac{\beta'\beta'}{\alpha'\alpha'}(\tfrac{1}{4}\alpha'\alpha' - x'x').$$

Diese Gleichung ist derjenigen völlig gleich, welch schon oben für die beyden Axen der Ellipse gefu den ist (§. 21.). Es muß demnach in Ansehun der Applikaten auf den Diametern alles das sta

finden

finden, was von den Applikaten auf den Axen statt findet.

2. Auflösung.

Wird der Anfangspunkt der Abscissen in dem Scheitel b genommen, so setze man $bi = x'' = bc - ci = \frac{1}{2}\alpha' - x'$, und man erhält

$x' = \frac{1}{4}\alpha' - x''$ folglich

$x'x' = \frac{1}{4}\alpha'\alpha' - \alpha'x' + x''x''$ und

$$y'y' = \frac{\beta'\beta'}{\alpha'\alpha'}\left(\frac{1}{4}\alpha'\alpha' - \frac{1}{4}\alpha'\alpha' + \alpha'x'' - x''x''\right)$$

$$= \frac{\beta'\beta'}{\alpha'\alpha'}\left(\alpha'x'' - x''x''\right).$$

§. 97.

Zusatz.

Aus der Gleichung

$y'y' = \frac{\beta'\beta'}{\alpha'\alpha'}\left(\frac{1}{4}\alpha'\alpha' - x'x'\right)$ ergiebt sich

$$y' = \pm\sqrt{\frac{\beta'\beta'}{\alpha'\alpha'}\left(\frac{1}{4}\alpha'\alpha' - x'x'\right)} \text{ oder}$$

$$y' = \pm\frac{\beta'}{\alpha'}\sqrt{\left(\frac{1}{4}\alpha'\alpha' - x'x'\right)} \text{ d. h.}$$

Ein jeder Werth für x' giebt zwey Werthe für y', die einander gleich aber entgegengesetzet sind. Wenn daher irgend eine Linie mit der Tangente eb, welche durch den Scheitel b des Diameters gehet, parallel gezogen wird, so theilet selbige der Diameter in zwey gleiche Theile.

§. 98.

Zusatz.

Wenn in der Gleichung

$$y'y' = \frac{\beta'\beta'}{\alpha'\alpha'}\left(\tfrac{1}{4}\alpha'\alpha' - x'x'\right)$$

der Werth von $y' = o$ wird, so hat man

$$o = \frac{\beta'\beta'}{\alpha'\alpha'}\left(\tfrac{1}{4}\alpha'\alpha' - x'x'\right) \text{ oder}$$

$$o = \tfrac{1}{4}\alpha'\alpha' - x'x' \text{ und}$$

$$x'x' = \tfrac{1}{4}\alpha'\alpha' \text{ mithin}$$

$$x' = \pm\tfrac{1}{2}\alpha'.$$

Es muß also die Abscissenlinie die Ellipse in zweye Punkten d und b schneiden, welche von dem Mittelpunkte c gleich weit entfernet sind. Demnach wird ein jeder Diameter der Ellipse in dem Mittelpunkte halbiret.

§. 99.

Zusatz.

Wird in der Gleichung

$$y'y' = \frac{\beta'\beta'}{\alpha'\alpha'}\left(\alpha'x'' - x''x''\right)$$

der Werth von $x'' = o$ oder $= \alpha'$, so wird auch $y' = o$, und es folgt hier eben so wie vorher, daß die Ellipse die Abscissenlinie in zweyten Punkten schneiden müsse, nemlich einmal, wenn x'' verschwindet, und das anderemal, wenn x'' dem Durchmesser gleich geworden ist. Wenn aber $x'' = \frac{1}{2}\alpha'$ geworden ist, so hat man auch

$y'y' =$

$$y'y' = \frac{\beta'\beta'}{\alpha'\alpha'}(\alpha'\tfrac{1}{2}\alpha' - \tfrac{1}{4}\alpha'\alpha')$$

$$= \frac{\beta'\beta'}{\alpha'\alpha'}(\tfrac{1}{4}\alpha'\alpha') \text{ und}$$

$y' = \frac{1}{2}\beta'$ d. h.

Wenn die Abscisse dem Halbmesser der Ellipse gleich geworden ist, so ist die dazu gehörige Applicate dem konjugirten Halbmesser gleich worden, woraus abermal folget, daß alle Halbmesser einander in dem Mittelpunkte halbiren.

§. 100.

Zusatz.

Für den Durchmesser $= \alpha'$ eines Kreises ist

$y'y' = \frac{1}{4}\alpha'\alpha' - x'x'$, mithin

$y' = \sqrt{(\frac{1}{4}\alpha'\alpha' - x'x')}$ und daher

y' im Kreise : y' in der Ell. $= \sqrt{(\frac{1}{4}\alpha'\alpha' - x'x')}$

$\frac{\beta'}{\alpha'}\sqrt{(\frac{1}{4}\alpha'\alpha' - x'x')}$ oder

y' i. K : y'. E. $1 : \frac{\beta'}{\alpha'}$. oder

y' i. K. : y. E. $= \alpha' : \beta'$.

Wenn man demnach über bd einen Kreis beschreibet, und die Applikaten für den Kreis in dem Verhältnisse $\alpha' : \beta'$ verkleinert, so hat man die Applikaten für die Ellipse, welche sodann auf dem Hauptdiameter unter einem Winkel aufgesetzet werden, welchen der Hauptdiameter mit dem konjugirten Diameter machet. Durch die Endpunkte der Applikaten wird man die Ellipse hindurch führen können.

Wäre $\alpha' = \beta'$, so würde nun auch selbst i
der Ellipse

$$y' = V(\tfrac{1}{4}\alpha'\alpha' - x'x')$$

demnach auch die Applikaten im Kreiße den Appli
katen in der Ellipse gleich seyn.

§. 101.

Zusatz.

Auf dem Fall, wenn der konjugirte Diame
ter dem Hauptdiameter gleich seyn soll, wird e
fordert, daß $cm = cp$, folglich auch $cm^2 = cp$
sey. Nun war

$cm = x$ und $cm^2 = x^2$ und
$cp^2 = \tfrac{1}{4}\alpha^2 - x^2$, mithin auch
$x^2 = \tfrac{1}{4}\alpha^2 - x^2$ und
$2x^2 = \tfrac{1}{4}\alpha^2$ und
$x^2 = \tfrac{1}{8}\alpha^2$ folglich
$x = V\tfrac{1}{8}\alpha^2$.

Dieser Werth für x ließe sich also konstruiren: man
beschreibe aus c (Fig. 26.) mit dem Halbmesser
ca einen Halbkreis, nehme den Bogen $ai = 45°$
und lasse aus i die senkrechte Linie if auf die Haupt-
axe ah herab, welche die Ellipse in den beyden
Punkten b und f schneiden wird; die beyden Dia-
meter bd und fg werden einander gleich seyn. Denn
in dem rechtwinklichten Dreyecke imc ist

$$ic^2 = cm^2 + mi^2$$

aber $cm = mi$ und $ci = ca$, mithin auch

$ca^2 = 2cm^2$ oder
$\tfrac{1}{4}\alpha^2 = 2.x^2$ und
$x^2 = \tfrac{1}{8}\alpha^2$, folglich
$x = V\tfrac{1}{8}\alpha^2$.

§. 102.

§. 102.

Zusatz.

Aus f (Fig. 25.) fälle man fp auf die Hauptaxe ah senkrecht, so sind die beyden Dreyecke ebm und pfc wegen pf ∥ bm und fc ∥ eb einander ähnlich, und man hat

$$em : mb = pc : pf, \text{ also}$$

$$pf = \frac{mb \cdot pc}{em} \text{ und}$$

$$pf^2 = \frac{mb^2 \cdot pc^2}{em^2},$$

Es war aber

$$mb^2 = y^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2}\left(\tfrac{1}{4}\alpha^2 - x^2\right)$$

$$pc^2 = \tfrac{1}{4}\alpha^2 - x^2$$

$$em^2 = \frac{\left(\tfrac{1}{4}\alpha^2 - x^2\right)^2}{x^2}, \text{ also}$$

$$pf^2 = \frac{\frac{\beta^2}{\alpha^2}\left(\tfrac{1}{4}\alpha^2 - x^2\right) \cdot \left(\tfrac{1}{4}\alpha^2 - x^2\right)}{\frac{\left(\tfrac{1}{4}\alpha^2 - x^2\right)^2}{x^2}}$$

$$= \frac{\frac{\beta^2}{\alpha^2}\left(\tfrac{1}{4}\alpha^2 - x^2\right)^2 \cdot x^2}{\left(\tfrac{1}{4}\alpha^2 - x^2\right)^2}$$

$$pf^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2} \cdot x^2$$

In den beyden rechtwinklichten Dreyecken bmc und fpc hat man ferner

$$bc^2 = bm^2 + mc^2 \text{ und}$$

$fc^2 = cp^2 + pf^2$ also auch

$bc^2 + fc^2 = bm^2 + mc^2 + cp^2 + pf^2$ oder

$bc^2 + fc^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2}(\frac{1}{4}\alpha^2 - x^2) + x^2 + \frac{1}{4}\alpha^2 - x^2 + \frac{\beta^2}{\alpha^2} \cdot x^2$ od

$bc^2 + fc^2 = \frac{1}{4}\beta^2 + \frac{1}{4}\alpha^2$ oder

$bc^2 + fc^2 = (\frac{1}{2}\beta)^2 + (\frac{1}{2}\alpha)^2$ d. h.

in einer jeden Ellipse ist die Summe der Quadrate der halben konjugirten Diameter der Summe der Quadrate beyder halben Axen gleich, oder auch die Summe der Quadrate beyder konjugirter Diameter ist gleich der Summe der Quadrate beyder Axen.

§. 103.

Lehrsatz.

Wenn durch den Scheitel f des konjugirten Diameters fg die Tangente fr gezogen wird, die sie die Tangente eb in r treffe, so ist das Parallellogramm rbcf zwischen den beyden Tangenten br und rf und den halben konjugirten Diametern cb und cf dem Rechtecke aus beyden halben Axen gleich.

Beweis.

Man ziehe aus dem Mittelpunkte c die Linie cf auf die verlängerte Tangente eb senkrecht, so ist das Dreyeck ebm dem Dreyeck ecf ähnlich, weil beyde einen rechten und den gemeinschaftlichen Winkel bec haben; hieraus ergiebt sich

$eb : bm = ec : cf$, mithin

$$cf = \frac{bm \cdot ec}{eb}.$$

Fer-

Ferner geben die ähnlichen Dreyecke ebm und cpf

$me : eb = cp : cf$, also

$cf = \frac{eb \cdot cp}{me}$. Hieraus ergiebt sich

$cf \cdot cf = \frac{bm \cdot ec}{eb} \cdot \frac{eb \cdot cp}{me}$

$= \frac{bm \cdot ec \cdot cp}{me}$ und

$cf^2 \cdot cf^2 = \frac{bm^2 \cdot ec^2 \cdot cp^2}{me^2}$

Es ist aber $bm^2 = y^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2} (\frac{1}{4}\alpha^2 - x^2)$

$ec = em + mc = \frac{\frac{1}{4}\alpha^2 - x^2}{x} + x$

$= \frac{\frac{1}{4}\alpha^2 - x^2 + x^2}{x}$

$= \frac{\frac{1}{4}\alpha^2}{x}$, mithin

$ec^2 = \frac{\frac{1}{16}\alpha^4}{x^2}$.

$cp^2 = \frac{1}{4}\alpha^2 - x^2$

und $me^2 = \frac{(\frac{1}{4}\alpha^2 - x^2)^2}{x^2}$; folglich

$cf^2 \cdot cf^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2} (\frac{1}{4}\alpha^2 - x^2) \frac{\frac{1}{16}\alpha^4}{x^2} (\frac{1}{4}\alpha^2 - x^2)$

$\frac{}{\frac{(\frac{1}{4}\alpha^2 - x^2)^2}{x^2}}$

=

$$= \frac{\beta^2}{a^2}\left(\tfrac{1}{4}a^2 - x^2\right)^2 . \frac{16a^4}{x^2} \cdot \frac{x^2}{\left(\tfrac{1}{4}a^2 - x^2\right)^2}$$

$$= \frac{\beta^2}{a^2} \cdot \tfrac{1}{16} \cdot a^4$$

$$= \tfrac{1}{16} \cdot a^2 \cdot \beta^2, \text{ also}$$

$$cf.\ cf. = \tfrac{1}{4}a\beta = \tfrac{1}{2}a . \tfrac{1}{2}\beta.$$

Nun ist cf. cf = dem Parallellogramm frbc, mi
hin auch frbc $= \frac{1}{2}a . \frac{1}{2}\beta$.

§. 104.

Zusatz.

Alle Parallellogramme, welche von zweye
Halbmessern in ein und der nemlichen Ellipse un
von zweyen Tangenten, welche durch die Scheit
der konjugirten Halbmesser gehen, gebildet werden
sind einander gleich, denn sie sind alle $= \frac{1}{2}a . \frac{1}{2}\beta$.

§. 105.

Aufgabe.

Den Parameter eines Diameters einer El
lipse zu finden.

Auflösung und Beweis.

In dem rechtwinklichten Dreyecke cpf hat man

$$cf^2 = cp^2 + pf^2 \text{ oder}$$

$$cf^2 = \tfrac{1}{4}a^2 - x^2 + \frac{\beta^2}{a^2} . x^2 \text{ (§. 102)}$$

Weiter hat man auch in dem Dreyecke ebm

$$eb^2 = em^2 + bm^2$$

$$= \frac{(\frac{1}{4}a - x^2)^2}{x^2} + \frac{\beta^2}{a^2}(\frac{1}{4}a^2 - x^2)$$

$$= (\frac{1}{4}a^2 - x^2) + \frac{\beta^2 . x^2}{a^2}(\frac{1}{4}a^2 - x^2)$$

$$\frac{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}{x^2}$$

$$= (\frac{1}{4}a^2 - x^2 + \frac{\beta^2}{a^2}.x^2)\frac{(\frac{1}{4}a^2 - x^2)}{x^2}$$

$$= cf^2 . \frac{\frac{1}{4}a^2 - x^2}{x^2}.$$

Man ziehe die halbe konjugirte Axe cv und verlängere selbige, bis sie die verlängerte Tangente eb in t schneide und ziehe bu mit ah parallel. Die beyden Dreyecke ebm und but sind einander ähnlich, und man hat

$$em^2 : eb^2 = bu^2 : bt^2 \text{ oder}$$

$$\frac{(\frac{1}{4}a^2 - x^2)^2}{x^2} : (cf^2 . \frac{\frac{1}{4}a^2 - x^2}{x^2}) = x^2 : bt^2$$

$$(\tfrac{1}{4}a^2 - x^2) : (cf^2 . (\tfrac{1}{4}a^2 - x^2) = x^2 : bt^2$$

$$(\tfrac{1}{4}a^2 - x^2) : cf^2 = x^2 : bt^2, \text{ mithin}$$

$$bt^2 = \frac{cf^2 . x^2}{\frac{1}{4}a^2 - x^2}; \text{ aber}$$

$$eb^2 = cf^2 . \frac{\frac{1}{4}a^2 - x^2}{x^2}; \text{ also}$$

$$bt^2 \bowtie eb^2 = cf^2 \text{ und}$$

$$bt . eb = cf^2.$$

Es sey nun der Parameter für den Hauptdiameter $= p'$, so muß

$$2cb : 2cf = 2cf : p', \text{ also}$$

$$2cb . p' = 4cf^2 \text{ oder}$$

$$cb . p' = 2cf^2 \text{ seyn, mithin}$$

$\frac{1}{2}p'$.

$\frac{1}{2}p' . cb = cf^2$ und
$\frac{1}{2}p' . cb = bt . eb$, daher
$cb : eb = bt : \frac{1}{2}p'$.

Man nehme also et als den Durchmesser eines Kreises an, und beschreibe einen Kreis, welcher wegen des rechten Winkels tce durch den Punkt c gehen wird. Man verlängere cb bis in w, und ziehe we, so ist wegen der Winkel $w = t$ und $wbe = tbc$ das Dreyeck ewb dem Dreyecke tbc ähnlich, und man hat

$cb : eb = bt : bw$,

folglich $bw = \frac{1}{2}p'$ oder

gleich dem halben Parameter des Hauptdiameters.

§. 106.

Aufgabe.

Es sind zwey konjugirte Diameter nebst dem Winkel, den sie im Mittelpunkte einschließen, gegeben, man soll eine Ellipse beschreiben.

Auflösung und Beweis.

Man ziehe die beyden Diameter db und fg (Fig. 27.) unter dem gegebenen Winkel gegen einander, und durch den Punkt b als Scheitel des Diameters bd die Linie et mit fg parallel. Nach dieser Proportion

$2cb : 2cf = 2cf : p'$

suche man den Parameter für den Hauptdiameter und trage die Helfte desselben aus b auf die Verlängerung bw des Diameters bd in w, theile cw

in

in h in zwey gleiche Theile, und setze hi senkrecht auf cw. Hierauf beschreibe man mit dem Halbmesser ic einen Kreis, welcher die gerade Linie et in e und t schneiden wird; durch diese beyden Punkte t und e ziehe man die geraden Linien tc und ec, so geben diese die Lagen der beyden Axen der Ellipse an. Um nun die Größen der Helften derselben zu finden, lasse man aus dem Punkte b die Linie bm auf ac und bu auf ct senkrecht herab, suche sodann zwischen ce und em und zwischen cu und ct die mittleren Proportionallinien ca und cv, jene wird die Helfte der Hauptaxe und diese die Helfte der konjugirten Axe seyn. Aus der großen und kleinen Axe wird man nun leicht die Ellipse beschreiben können. Nun ist $ce = cm + me$

$$= x + \frac{\frac{1}{4}a^2 - x^2}{x} = \frac{\frac{1}{4}a^2}{x}$$

mithin $cm \times ce = x \times \frac{\frac{1}{4}a^2}{x}$

$= \frac{1}{4}a^2$; demnach

$cm : \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}a : ce$ und

$\frac{1}{2}a = ca.$

Ferner ist $em : mb = ec : ct$ oder

$$\frac{\frac{1}{4}a^2 - x^2}{x} : \frac{\beta}{a}\sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 - x^2)} = \frac{\frac{1}{4}a^2}{x} : ct$$

oder $\frac{1}{4}a^2 - x^2 : \frac{\beta}{a}\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - x^2)} = \frac{1}{4}a^2 : ct$

oder $\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - x^2)} : \frac{\beta}{a} = \frac{1}{4}a^2 : ct$ und

$$ct = \frac{\frac{1}{4}a \cdot \beta}{\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - x^2)}}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}\beta^2}{\frac{\alpha}{\beta}\sqrt{(\frac{1}{4}\alpha^2 - x^2)}}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}\beta^2}{cu} \text{ und}$$

$ct.cu = \frac{1}{4}\beta^2$, mithin

$ct : \frac{1}{2}\beta = \frac{1}{2}\beta : cu$, also auch

$\frac{1}{2}\beta = cv$.

§. 107.

Erklärung.

Es sey c (Fig. 28.) der Mittelpunkt ein Hyperbel, db der Durchmesser derselben, und die Tangente für den Punkt b. Auf der Haup axe nehme man den Theil cp als mittlere Propo tionallinie zwischen am und hm, fälle durch p a pa die Linie pf senkrecht herab und ziehe durch d Mittelpunkt c die Linie fg mit der Tangente eb p rallel, bis sie pf in f schneide, alsdenn nehme ma cg = cf, so heißt fg ein dem Diameter db zuge ordneter oder konjugirter Diameter.

§. 108.

Aufgabe.

Eine Gleichung für die Hyperbel zu finden wenn auf dem Hauptdiameter die Abscissen ge nommen werden, und die Applikaten mit der Tan gente, welche durch den Scheitelpunkt des Diame ters gehet, parallel sind.

1. Auf

1. Auflösung.

Man ziehe aus b die Linie bm auf die Axe senkrecht herab als die Applikate für den Punkt b. Wird nun der Anfangspunkt der Abscissen in dem Mittelpunkte c angenommen, so ist cm die zur Applikate bm gehörige Abscisse. Ferner nehme man ci als die Abscisse auf den Hauptdiameter an, und ziehe durch i die Linie kl mit der Tangente eb parallel, so ist ik oder il die zur Abscisse ci gehörige Applikate. Durch i und k ziehe man in und kq mit bm und kq mit an parallel, so ist kq = on. Nun nehme man

cm = x
mb = y
ha = a
on = kq = λ

und cn = δ, so hat man

ao = co − ca = cn − on − ca
= δ − λ − ½a
ho = ha + ao = a + δ − λ − ½a
= δ − λ + ½a
am = cm − ca = x − ½a
hm = hc + cm = x + ½a,

Die beyden ähnlichen Dreyecke cmb und cni geben

cm : mb = cn : ni oder
x : y = δ : ni, mithin
ni = $\frac{y\delta}{x}$,

In der Hyperbel ist

ca + am : am = ha + am : me (S. 85.)
oder cm : am = hm : me oder
y : x − ½a = x + ½a : me, mithin

$$me = \frac{x^2 - \frac{1}{4}a^2}{x}.$$

Die beyden Dreyecke cbm und ikq sind wege
ki ∥ eb und em ∥ kq einander ähnlich, und ma
hat

$$me : mb = kq : qi \text{ oder}$$

$$\frac{x^2 - \frac{1}{4}a^2}{x} : y = \lambda : qi \text{ mithin}$$

$$qi = \frac{\lambda y x}{x^2 - \frac{1}{4}a^2}. \text{ Hieraus erhällt ma}$$

$$qn = ko = ni - qi$$

$$= \frac{y\delta}{x} - \frac{\lambda y x}{x^2 - \frac{1}{4}a^2}$$

$$= y\left(\frac{\delta}{x} - \frac{\lambda x}{x^2 - \frac{1}{4}a^2}\right)$$

Man hat ferner in der Hyperbel

$$ko^2 : mb^2 = ao \times ho : am \times hm$$

$$\text{aber } ao \times ho = (\delta - \lambda - \tfrac{1}{2}a)(\delta - \lambda + \tfrac{1}{2}a)$$

$$= ((\delta - \lambda)^2 - \tfrac{1}{4}a^2) \text{ und}$$

$$am \cdot hm = (x - \tfrac{1}{2}a)(x + \tfrac{1}{2}a)$$

$$= x^2 - \tfrac{1}{4}a^2, \text{ folglich}$$

$$y^2\left(\frac{\delta}{x} - \frac{\lambda x}{x^2 - \frac{1}{4}a^2}\right)^2 : y^2 = ((\delta - \lambda)^2 - \tfrac{1}{4}a^2) :$$

$$x^2 - \tfrac{1}{4}a^2$$

$$\left(\frac{\delta}{x} - \frac{\lambda x}{x^2\frac{1}{4} - a^2}\right)^2 : 1 = ((\delta - \lambda)^2 - \tfrac{1}{4}a^2 : x^2 - \tfrac{1}{4}a^2$$

$$\left(\frac{\delta(x^2 - \frac{1}{4}a^2) - \lambda x^2}{x(x^2 - \frac{1}{4}a^2}\right)^2 : 1 = ((\delta - \lambda)^2 - \tfrac{1}{4}a^2) :$$

$$x^2 - \tfrac{1}{4}a^2$$

$$(\delta(x^2 -$$

$$\frac{(\delta(x^2-\frac{1}{4}a^2)-\lambda x^2)^2}{x^2(x^2-\frac{1}{4}a^2)^2} : 1 = ((\delta-\lambda)^2-\frac{1}{4}a^2)$$

$x^2-\frac{1}{4}a^2$

$$\text{also } \frac{(\delta(x^2-\frac{1}{4}a^2)-\lambda x^2)^2(x^2-\frac{1}{4}a^2)}{x^2(x^2-\frac{1}{4}a^2)^2} = (\delta-\lambda)^2-\frac{1}{4}a^2$$

$$\text{oder } \frac{(\delta(x^2-\frac{1}{4}a^2)-\lambda x^2)^2}{x^2(x^2-\frac{1}{4}a^2)} = \delta^2-2\delta\lambda+\lambda^2-\frac{1}{4}a^2$$

$$\text{oder } \frac{\delta^2(x^2-\frac{1}{4}a^2)^2-2\delta(x^2-\frac{1}{4}a^2)\lambda x^2+\lambda^2x^4}{x^2(x^2-\frac{1}{4}a^2)} =$$

$\delta^2-2\delta\lambda+\lambda^2-\frac{1}{4}a^2$

$$\text{oder } \frac{\delta^2(x^2-\frac{1}{4}a^2)}{x^2}-2\delta\lambda+\frac{\lambda^2x^2}{x^2-\frac{1}{4}a^2} = \delta^2-2\delta\lambda+$$

$\lambda^2-\frac{1}{4}a^2$

$$\delta^2-\frac{\frac{1}{4}a^2\delta^2}{x^2}+\frac{\lambda^2x^2}{x^2-\frac{1}{4}a^2} = \delta^2+\lambda^2-\frac{1}{4}a^2$$

$$\frac{\lambda^2x^2}{x^2-\frac{1}{4}a^2}-\frac{\frac{1}{4}a^2\delta^2}{x^2} = \lambda^2-\frac{1}{4}a^2.$$

Es sey nun ci $=$ x′, ik $=$ il $=$ y′, cb $=\frac{1}{2}a'$ u. cg $=\frac{1}{2}\beta=$ cf. Die beyden ähnlichen Dreyecke cbm und cin geben

cb : cm $=$ ci : cn oder

$\frac{1}{2}a'$: x $=$ x′ : δ also

$$\delta = \frac{xx'}{\frac{1}{2}a'} \text{ und } \delta^2 = \frac{x^2x'x'}{\frac{1}{4}a'a'}.$$

Auch die beyden Dreyecke cpf und kqi sind einander ähnlich, und man hat

cf : cp $=$ ki : kq oder

cf : am $=$ ah $=$ ki : kq oder

$\frac{1}{2}\beta' : \sqrt{(x^2 - \frac{1}{4}\alpha^2)} = y' : \lambda$ also

$$\lambda = \frac{y'\sqrt{(x^2 - \frac{1}{4}\alpha^2)}}{\frac{1}{2}\beta'} \text{ und}$$

$$\lambda^2 = \frac{y'y'(x^2 - \frac{1}{4}\alpha^2)}{\frac{1}{4}\beta'\beta'}.$$

Setzt man diese gefundenen Werthe von δ^2 und λ^2 in obige Gleichung, so ergiebt sich

$$\frac{y'y'(x^2 - \frac{1}{4}\alpha^2)}{\frac{1}{4}\beta'\beta'} \cdot x^2 - \frac{1}{4}\alpha^2 \cdot \frac{x^2x'x'}{x^2\frac{1}{4}\alpha'\alpha'} = \frac{y'y'(x^2 - \frac{1}{4}\alpha^2)}{\frac{1}{4}\beta'\beta'} - \frac{1}{4}\alpha^2$$

$$\frac{y'y'x^2}{\frac{1}{4}\beta'\beta'} - \frac{\frac{1}{4}\alpha^2 \cdot x^2 \cdot x'x'}{\frac{1}{4}\alpha'\alpha' \cdot x^2} = \frac{y'y'(x^2 - \frac{1}{4}\alpha^2)}{\frac{1}{4}\beta'\beta'} - \frac{1}{4}\alpha^2$$

$$\frac{y'y' \cdot x^2}{\frac{1}{4}\beta'\beta'} - \frac{\frac{1}{4}\alpha^2x'x'}{\frac{1}{4}\alpha'\alpha'} = \frac{y'y'x^2}{\frac{1}{4}\beta'\beta'} - \frac{\frac{1}{4}\alpha^2y'y'}{\frac{1}{4}\beta'\beta'} - \frac{1}{4}\alpha^2$$

und $$-\frac{\frac{1}{4}\alpha^2x'x'}{\frac{1}{4}\alpha'\alpha'} = -\frac{\frac{1}{4}\alpha^2y'y'}{\frac{1}{4}\beta\beta'} - \frac{1}{4}\alpha^2$$

oder $$-\frac{x'x'}{\frac{1}{4}\alpha'\alpha'} = -\frac{y'y'}{\frac{1}{4}\beta'\beta'} - 1, \text{ also}$$

$$\frac{y'y'}{\frac{1}{4}\beta'\beta'} = \frac{x'x'}{\frac{1}{4}\alpha'\alpha'} - 1 \text{ oder}$$

$$\frac{y'y'}{\frac{1}{4}\beta'\beta'} = \frac{x'x' - \frac{1}{4}\alpha'\alpha'}{\frac{1}{4}\alpha'\alpha'} \text{ oder}$$

$$y'y' = \frac{\frac{1}{4}\beta\beta'}{\frac{1}{4}\alpha'\alpha'}(x'x' - \frac{1}{4}\alpha'\alpha') \text{ oder}$$

$$y'y' = \frac{\beta'\beta'}{\alpha\alpha'}(x'x' - \frac{1}{4}\alpha'\alpha').$$

Hieraus sieht man, daß diese Gleichung vollkommen derjenigen gleich ist, welche oben für die beyden Axen gefunden ist.

2. Auflösung.

Nimmt man den Anfangspunkt der Abscissen in dem Scheitel b, so sey $bi = x''$ und man hat $bi = ci - cb = x'' = x' - \frac{1}{2}a'$ und

$x' = x'' + \frac{1}{2}a'$ mithin

$x'x' = x''x'' + a'x'' + \frac{1}{4}a'a'$, und

$$yy = \frac{\beta'\beta'}{a'a'}(x''x'' + a'x'' + \tfrac{1}{4}a'a' - \tfrac{1}{4}a'a')$$

$$= \frac{\beta'\beta'}{a'a'}(x''x'' + a'x'').$$

§. 108.

Zusatz.

In der Gleichung $y'y' = \frac{\beta'\beta'}{a'a'}(x'x' - \frac{1}{4}a'a')$ findet man auch

$$y' = \pm\frac{\beta'}{a'}\sqrt{(x'x' - \tfrac{1}{4}a'a')}$$ d. h.

jeder Werth von x' giebt zwey Werthe für y', die für sich betrachtet gleich, einander aber entgegengesetzet sind. Es gehören also zu einerley Abscissen zwey gleiche Applikaten. Ein jeder Diameter der Hyperbel theilet daher eine jede Linie, welche mit der Tagente durch den Scheitel des Diameters parallel gehet, in zwey gleiche Theile.

§. 109.

Zusatz.

Wenn $x' = \frac{1}{2}a'$ wird, so wird $y' = o$ d. h. für die Helfte des begränzten Theils des Durchmessers verschwindet die Applikate.

§. 110.

Zusatz.

Aus der vorigen Gleichung erhält man no

$a'a' \cdot y'y' = \beta\beta\ (x'x' - \frac{1}{4}\alpha'\alpha')$ mit

$a'a' : \beta\beta = (x'x' - \frac{1}{4}\alpha'\alpha') : y'y'$ ode

$a'a' : \beta'\beta = (\ -\frac{1}{2}\alpha')(x' + \frac{1}{2}\alpha') : y'y'$

$db^2 : fg^2 = bi \cdot di : ik^2$

das Quadrat des Hauptdiameters verhält sich zu Quadrate des konjugirten Diameters, wie das Pr dukt bi. di zu dem Quadrate der Applikate.

§. 111.

Lehrsatz.

Wenn die Tangente eb für den Punkt b Hyperbel bis an die Asymptote in r verläng wird, so ist rb der halben konjugirten Axe cg glei

Beweis.

Man verlängere cb und kl so weit, bis die Asymptoten in u, t und v schneiden, so ist nic allein bu = br, sondern auch iv = it (§. 42.) u lv = kt. Man setze ur = π, mithin rb = $\frac{1}{2}$ und man hat wegen Aehnlichkeit der beyden Dreyec ebr und cit

$cb : ci = rb : ti$ oder

$\frac{1}{2}\alpha' : x' = \frac{1}{2}\pi : ti$ oder

$\alpha' \cdot x' = \pi : ti$ und

$$ti = \frac{\pi x'}{\alpha'} = iv$$

Nun ist $tl = ti + il = \frac{\pi\alpha'}{\alpha'} + y'$, und

lv =

$lv = iv - il = \frac{\pi x'}{\alpha'} - y'$, mithin

$tl.lv = \frac{\pi^2 x'x'}{\alpha'\alpha'} - y'y'$; aber

$tl.lv = rb^2$ (§. 48.) $= \frac{1}{4}\pi^2$, demnach

$\frac{\pi^2 x'x'}{\alpha'\alpha'} - y'y' = \frac{1}{4}\pi^2$;

Ferner war $y'y' = \frac{\beta'\beta'}{\alpha'\alpha'}(x'x' - \frac{1}{4}\alpha'\alpha')$; also auch

$\frac{\pi^2 x'x'}{\alpha'\alpha'} - \frac{\beta'\beta'}{\alpha'\alpha'}(x'x' - \frac{1}{4}\alpha'\alpha') = \frac{1}{4}\pi^2$ oder

$\frac{\pi^2 x'x'}{\alpha'\alpha'} - \frac{\beta'\beta' x'x'}{\alpha'\alpha'} + \frac{1}{4}\beta'\beta' = \frac{1}{4}\pi^2$ oder

$(\pi^2 - \beta'\beta')\frac{x'x'}{\alpha'\alpha'} = \frac{1}{4}(\pi^2 - \beta'\beta')$ oder

$(\pi^2 - \beta'\beta')\frac{x'x'}{\alpha'\alpha'} - \frac{1}{4}(\pi^2 - \beta'\beta') = 0$ od.

$(\frac{x'x'}{\alpha'\alpha'} - \frac{1}{4})(\pi^2 - \beta'\beta') = 0$ und

$\pi^2 - \beta'\beta' = 0$, also

$\pi^2 = \beta'\beta'$ und

$\pi = \beta'$ oder

$\frac{1}{2}\pi = \frac{1}{2}\beta'$.

§. 112.

Zusatz.

Wenn man demnach von g nach b die gerade Linie gb ziehet, so ist crbg ein Parallellogramm. Man lasse nun aus dem Mittelpunkte c die Linie

cf senkrecht auf die verlängerte Tangente eb herab
so ist der Flächeninhalt dieses Parallellogramm
= rb . cf. Nun ist das Dreyeck cfe dem Dreyeck
ebm ähnlich, und man hat

$$eb : bm = ce : cf \text{ und}$$

$$cf = \frac{ce \cdot bm}{eb}.$$

Auch die beyden ähnlichen Dreyecke ebm und cp
geben

$$em : eb = cp : cf \text{ oder}$$

$$em : eb = cp : cg \text{ und}$$

$$cg = \frac{eb \cdot cp}{em}, \text{ mithin}$$

$$cf \cdot cg = \frac{ce \cdot bm}{eb} \cdot \frac{eb \cdot cp}{em}$$

$$= \frac{ce\ bm \cdot cp}{em} \text{ und}$$

$$cf^2 \cdot cg^2 = \frac{ce^2 \cdot bm^2 \cdot cp^2}{em^2}$$

Es ist aber $ce = cm - em = x - \frac{x^2 - \frac{1}{4}a^2}{x}$

$$= \frac{\frac{1}{4}a^2}{x} \text{ mithin}$$

$$ce^2 = \frac{\frac{1}{16}a^4}{x^2}$$

$$bm^2 = y^2 = \frac{\beta^2}{a^2}(x^2 - \tfrac{1}{4}a^2)$$

$$cp^2 = x^2 - \tfrac{1}{4}a^2$$

$$em^2 = \frac{(x - \frac{1}{4}a^2)^2}{x^2}, \text{ folglich}$$

cf.

$$cf^2 . cg^2 = cf^2 . rb^2$$

$$= \frac{\frac{1}{16}a^4}{x^2} \cdot \frac{\beta^2}{a^2}(x^2 - \tfrac{1}{4}a^2)(x^2 - \tfrac{1}{4}a^2)$$

$$\frac{(x - \frac{1}{4}a^2)^2}{x^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{16}a^4 . \beta^2}{a^2} = \tfrac{1}{16}a^2 . \beta^2, \text{ und}$$

$$cf, rb = \tfrac{1}{4}a . \beta = \tfrac{1}{2}a . \tfrac{1}{2}\beta.$$ d. h. der Flächeninhalt des Parallellogramms crbg ist dem Flächeninhalte des Rechteckes auf beyden halben konjugirten Axen gleich. Man mag also den Punkt in der Hyperbel annehmen wo man will, so wird ein solches Parallellogramm allemal eine beständige Größe seyn.

§. 113.

Zusatz.

In dem rechtwinklichten Dreyecke pcf ist

$$cf^2 = cp^2 + pf^2.$$

Nun war $cf = \frac{eb . cp}{em}$ und

$$cf^2 = \frac{eb^2 . cp^2}{em^2}, \text{ mithin}$$

$$\frac{eb^2 . cp^2}{em^2} = cp^2 + pf^2;$$

$eb^2 = em^2 + bm^2$ also

$$cp^2 + \frac{bm^2 . pc^2}{em^2} = cp^2 + pf^2 \text{ und}$$

$$pf^2 = \frac{bm^2 \cdot pc^2}{em^2};$$

$$bm^2 = y^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2}(x^2 - \tfrac{1}{4}\alpha^2)$$

$$pc^2 = x^2 - \tfrac{1}{4}\alpha^2 \text{ und}$$

$$em^2 = \frac{(x^2 - \frac{1}{4}\alpha^2)^2}{x^2}, \text{ folglich}$$

$$pf^2 = \frac{\frac{\beta^2}{\alpha^2}(x^2 - \frac{1}{4}\alpha^2)(x^2 - \frac{1}{4}\alpha^2)}{\frac{(x^2 - \frac{1}{4}\alpha^2)^2}{x^2}} \text{ oder}$$

$$pf^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2} \cdot x^2. \text{ Ferner hat man,}$$

$$cb^2 = bm^2 + cm^2, \text{ also auch}$$

$$cb^2 - cf^2 = (bm^2 + cm^2) - (cp^2 + pf^2) \text{ ob}$$

$$bc^2 - cf^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2}(x^2 - \tfrac{1}{4}\alpha^2) + x^2 - x^2 + \tfrac{1}{4}\alpha^2 -$$

$$\frac{\beta^2}{\alpha^2} \cdot x^2$$

$$cb^2 - cf^2 = \tfrac{1}{4}\alpha^2 - \tfrac{1}{4}\beta^2 \text{ d. h.}$$

die Differenz der Quadrate zweyer halber folglich auch zweyer ganzer Diameter ist gleich der Differenz beyder Quadrate der Helfte oder der ganzen konjugirten Axen.

§. 114.

Zusatz.

In der gleichseitigen Hyperbel ist $\alpha = \beta$, mithin auch $\frac{1}{4}\alpha^2 = \frac{1}{4}\beta^2$, also auch $cb^2 = cf^2$ und $cb = cf$ d. h. in der gleichseitigen Hypelbel ist der Hauptdiameter seinem konjugirten Diameter gleich.

§. 115.

§. 115.

Aufgabe.

Es sind zwey konjugirte Diameter der Hyperbel nebst dem Winkel, den sie im Mittelpunkte einschließen, gegeben, man soll den Parameter für den Hauptdiameter finden.

Auflösung und Beweis.

Man ziehe die konjugirte Axe und auf selbige durch den Punkt b (Fig. 29.) die Linie bn senkrecht. Ferner verlängere man die Tangente be, bis sie die konjugirte Axe in l schneide; hierauf theile man le in k in zwey gleiche Theile und beschreibe mit dem Halbmesser ke = kl einen Halbkreis, welcher durch den Mittelpunkt der Hyperbel gehen und den Diameter db in o schneiden wird; die Linie bo wird die Helfte des gesuchten Parameters seyn. Es sind nemlich die beyden Dreyecke bem und nbl einander ähnlich und man hat

em : eb = bn : bl oder
em : eb = cm : bl also
$em^2 : eb^2 = cm^2 : bl^2$;

Es ist aber $eb^2 = bm^2 + em^2$, oder

$$eb^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2}(x^2 - \tfrac{1}{4}a^2) + \frac{(x^2 - \frac{1}{4}a^2)^2}{x^2}$$

$$= \left(\frac{(x^2 - \frac{1}{4}a^2)}{x^2} + \frac{\beta^2}{\alpha^2}\right) \cdot (x^2 - \tfrac{1}{4}a^2)$$

$$= \left(x^2 - \tfrac{1}{4}a^2 + \frac{\beta^2 x^2}{\alpha^2}\right)\left(\frac{x^2 - \frac{1}{4}a^2}{x^2}\right).$$

Weiter ist $cg^2 = cp^2 + pf^2$

=

$= x^2 - \frac{1}{4}a^2 + \frac{\beta^2 x^2}{a^2}$, folglich

$eb^2 = \frac{x^2 - \frac{1}{4}a^2}{x^2}$. Daher giebt vorige Propor

$\frac{(x^2 - \frac{1}{4}a^2)^2}{x^2} : \frac{x^2 - \frac{1}{4}a^2}{x^2}$. $cg^2 = x^2 : bl^2$ ode

$x^2 - \frac{1}{4}a^2 : cg^2 = x^2 : bl^2$ und

$bl = \frac{x^2 \cdot cg^2}{x^2 - \frac{1}{4}a^2}$; mithin auch

$eb^2 \cdot bl^2 = cg^4$ und

$eb \cdot bl = cg^2$.

Man setze nun den Parameter für den Diamete
$db = p'$ so ist vermöge der Erklärung

$2cb : 2cg = 2cg : p'$ oder

$cb : cg = 2gc : p'$ also

$p' = \frac{2cg^2}{cb}$ und

$\frac{1}{2}p' \cdot cb = cg^2$ also auch

$eb\ bl = \frac{1}{2}p' \cdot cb$ folglich

$cb : eb = bl : \frac{1}{2}p'$.

Nach geometrischen Gründen hat man nun

$cb : eb = bl : bo$, folglich

ist $bo = \frac{1}{2}p'$.

§. 116.

Aufgabe.

Es sind zwey konjugirte Diameter nebst dem Winkel, den sie einschließen, gegeben, man soll die beyden Axen finden, um die Hyperbel zu verzeichnen.

Auflösung.

Man ziehe beyde Diameter unter dem bestimmten Winkel gegen einander, suche sodann den Parameter und trage die Helfte desselben aus b nach o, so weiß man daß oc eine Sehne von einem Kreisbogen sey, dessen Mittelpunkt in le liegen müsse um also diesen Mittelpunkt zu finden, theile man oc in i rechtwinklicht in zwey gleiche Theile, die Theilungslinie ik wird den Mittelpunkt k bestimmen. Nun beschreibe man mit dem Halbmesser kc einen Kreis welcher die Tangente pl in den beyden Punkten e und l schneiden wird. Hierauf ziehe man durch c und e und durch c und l die geraden Linien cm und ln, welche die Lagen der beyden Axen angeben. Um nun noch die Größen derselben zu finden, so lasse man aus dem Punkte b die Linien bm und bn auf die Axen senkrecht herab, und suche zwischen ce und cm und zwischen cn und cl die mittleren Proportionallinien ca und cv, jene wird die Helfte der großen, und diese der konjugirten Axe seyn.

Beweis.

Vermöge des §. 112. war $ce = \frac{\frac{1}{4}a^2}{x}$

$cm = x$ mithin

$ce \cdot cm = \frac{1}{4}a^2$ demn.

$ce : \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}a : cm$, u.

$\frac{1}{2}a = ca$.

Ferner sind beyde Dreyecke bem und cel einander ähnlich, und man hat

$em : mb = ec : cl$ oder

$em : cn = ec : cl$ oder

$$\frac{x^2-\frac{1}{4}a^2}{x} : \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{(x^2-\tfrac{1}{4}a^2)} = \frac{\frac{1}{4}a^2}{x} : cl \text{ oder}$$

$$\sqrt{(x^2-\tfrac{1}{4}a^2)} : \frac{\beta}{\alpha} = \tfrac{1}{4}a^2 : cl \text{ und}$$

$$\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{(x^2-\tfrac{1}{4}a^2)} : \frac{\beta^2}{\alpha^2} = \tfrac{1}{4}a^2 : cl \text{ also}$$

$$cl = \frac{\frac{1}{4}\beta^2}{\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{(x^2-\frac{1}{4}a^2)}} \text{ oder}$$

$$cl = \frac{\frac{1}{4}\beta^2}{cn} \text{ oder}$$

$$cl.cn = \tfrac{1}{4}\beta^2 \text{ und}$$

$$cl : \tfrac{1}{2}\beta = \tfrac{1}{2}\beta : cn, \text{ folglich}$$

$$\tfrac{1}{2}\beta = cv.$$

§. 117.

Zusatz.

In der gleichseitigen Hyperbel ist $bc = cg$, mithin auch der halbe Parameter $bo = bc$. Alsdenn wird bc die Tangente des Kreises, und man hat nur nöthig auf cb in c eine senkrechte Linie zu errichten, um den Mittelpunkt des Kreises in k zu finden.

§. 118.

Aufgabe.

Eine Gleichung für die Parabel finden, wenn die Abscissen auf dem Diameter bz (Fig 30.) genommen werden, und die Applikaten mit der Tangente,

gente, die durch den Scheitel des Diameters b gehet, parallel sind.

Auflösung.

Es sey bi eine Abscisse, so ist ik oder il die dazu gehörige Applikate. Aus den Punkten k, i lasse man die senkrechten Linien ko, bm, in auf die Axe der Parabel senkrecht herab, und ziehe kq mit af parallel. Es sey

$$am = x$$
$$mb = y = in$$
$$an = \delta$$
$$on = \lambda = kq$$

folglich $ao = an - on = \delta - \lambda$.

Das Dreyeck ebm ist dem Deeyecke ikq ähnlich und man hat

$$em : mb = kq : qi.$$

Nun ist $em = 2x$, $mb = y$ und $kq = om = \lambda$, also

$$2x : y = \lambda : qi \text{ und}$$
$$qi = \frac{y\lambda}{2x}.$$

Weiter hat man

$$ko = nq = ni - qi$$
$$= y - \frac{y\lambda}{2x}$$
$$= y\left(1 - \frac{\lambda}{2x}\right).$$

In der Parabel ist

$ok^2 : mb^2 = ao : am$ (§. 10.); mithin

$$y^2\left(1 - \frac{\lambda}{2x}\right)^2 : y^2 = \delta - \lambda : x \text{ oder}$$

(1 —

$$(1 - \frac{\lambda}{2x})^2 : 1 = \delta - \lambda : x, \text{ und}$$

$$(1 - \frac{\lambda}{2x})^2 . x = \delta - \lambda \text{ oder}$$

$$\frac{(2x-\lambda)^2}{4x^2} . x = \delta - \lambda \text{ oder}$$

$$\frac{(2x-\lambda)^2}{4x} = \delta - \lambda \text{ oder}$$

$$\frac{4x^2 - 4x\lambda + \lambda^2}{4x} = \delta - \lambda \text{ oder}$$

$$x - \lambda + \frac{\lambda^2}{4x} = \delta - \lambda \text{ oder}$$

$$x + \frac{\lambda^2}{4x} = \delta \text{ und}$$

$$\delta - x = \frac{\lambda^2}{4x}.$$

Man setze bi = x', ip = il = y' und den Parameter für die Axe der Parabel = p, so ist $y^2 = px$. Das rechtwinklichte Dreyeck kqi giebt

$$ik^2 = iq^2 + kq^2 \text{ oder}$$

$$y'y' = \frac{y^2\lambda^2}{4x^2} + \lambda^2 \text{ oder}$$

$$y'y' = \frac{px\lambda^2}{4x^2} + \lambda^2 \text{ oder}$$

$$y'y' = \frac{p\lambda^2}{4x} + \lambda^2.$$

Nun ist bi = mn = an — am = $\delta - x = x'$, mithin

$$x' = \frac{\lambda^2}{4x} \text{ und } \lambda^2 = 4xx' \text{ und}$$

$y'y' =$

$$y'y' = px' + 4xx'$$
$$= (p + 4x)\, x'$$

der Parameter p für die Axe ist der vierfachen Entfernung des Scheitels a von dem Brennpunkte f gleich. (§. 8.). Dieserwegen hat man auch die vierfache Entfernung des Punktes b von dem Brennpunkte f oder 4bf den Parameter des Diameters bz genennt. Es sey also dieser Parameter $= p'$ so ist $p' = 4bf$. Es ist aber $bf = bd = mc = ma + ac = x + \frac{1}{4}p$ folglich $4x + p = p'$; mithin auch

$$y'y' = (p + 4x)\, x' = p'x'.$$

Hieraus sieht man, daß diese Gleichung vollkommen mit derjenigen übereinstimmend ist, welche für die Axe der Parabel gefunden worden.

§. 119.

Zusatz.

Die Gleichung $y'y' = p'x'$ giebt auch

$$y' = \pm \sqrt{(p'x')}$$ d. h.

ein Werth von x' giebt allemal zwey Werthe für y', die an und für sich betrachtet gleich, einander aber entgegengesetzet sind. Es theilet daher ein jeder Diameter der Parabel eine jede Linie, welche mit der Tangente durch den Scheitel des Diameters parallel gehet, auch hier in zwey gleiche Theile.

§. 120.

Aufgabe.

Es ist ein Diameter der Parabel nebst dem Koordinatenwinkel und dem Parameter für den

Diameter gegeben, man soll die Parabel verzeichnen.

Auflösung.

1. Durch den Scheitel b des Diameters b ziehe man die Linie be gegen bz unter dem gegebenen Koordinatenwinkel.

2. Ferner setze man in b die Linie bf unter den Winkel fbe = zbr, so weiß man, daß b nach dem Brennpunkte hingehe.

3. Mache man bf = $\frac{1}{4}p'$, so wird nun f der Brennpunkt der Parabel seyn. Durch diesen Brennpunkt f ziehe man cf mit bz parallel, so wird ef die Lage der Axe abgeben und be in e schneiden.

4. Aus dem Punkte b lasse man auf cf die senkrechte Linie bm herab, so ist nun me die Subtangente für den Punkt b der Parabel.

5. Diese Subtangente me theile man in a in zwey gleiche Theile, so wird a der Scheitel der Parabel seyn.

6. Aus dem Scheitel a und dem Brennpunkte f läßt sich nun die Parabel sehr leicht verzeichnen (§. 7.).

Drittes Kapitel.

Von den Linien der zweyten Ordnung und derselben Construction.

§. 121.

Erklärung.

Es sey gc (Fig. 31.) $= x$ und $hq = v$, der Winkel $ghq = \omega$, und $\alpha + \beta x + \gamma y + \delta x^2 + \varepsilon xy + \zeta y^2 = 0$ §. 66.), wo die Buchstaben α, β, γ u. s. willkührliche beständige Größen ja selbst 0 bedeuten können, so heißt die krumme Linie rqko eine Linie von der zweyten Ordnung.

§. 122.

Zusatz.

Es sind also die Kegelschnitte Linien von der zweyten Ordnung. Denn die Gleichungen $y^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2}(\pm x^2 \mp \frac{1}{4}\alpha^2)$; $y^2 = \frac{\alpha^2}{\beta^2}(\frac{1}{4}\beta^2 \mp x^2)$; $y^2 = px$; $xy = \alpha^2$ u. s. sind lauter Gleichungen vom zweyten Grade.

§. 123.

Zusatz.

Weil eine gegebene Gleichung zwischen zweyen veränderlichen Größen, welche die Natur einer krum-

krummen Linie ausdruckt, beständig von dem nä
lichen Grade bleibet, die Lagen der Koordinat
und der Koordinatenwinkel mögen Aenderung
leiden wie man will (§. 71.), so lassen sich ga
allgemein die Linien von der zweyten Ordnung u
ter diese Gleichung

$$\delta t^2 + \varepsilon tz + \lambda z^2 + \mu\delta t + \nu\lambda z + \gamma\delta^2 =$$

bringen, wo die bekannten Größen δ, ε, λ u.
positive oder negative Größen bedeuten können.

§. 124.

Aufgabe.

Die allgemeine Gleichung vom zweyten Gra
so vorzubereiten, daß sie konstruiret werden kann

Auflösung.

Man ordne die Gleichung nach einer in ih
befindlichen unbekannten Größe, und schaffe sodan
den zweyten Satz weg. Ordnet man also die Glei
chung in Rücksicht der Größe t so erhält man

$$\delta t^2 + (\varepsilon z + \mu\delta)\,t + (\lambda z^2 + \nu\lambda z + \gamma\delta^2) =$$

und wenn alle Glieder der Gleichung durch den
Coefficienten δ dividiret werden

$$t^2 + \frac{\varepsilon z + \mu\delta}{\delta}\,.\,t + \frac{\lambda z^2 + \nu\lambda z + \gamma\delta^2}{\delta} =$$

Um nun den zweyten Satz wegzuschaffen, ist aus
der Algebra bekannt, daß man statt der unbekann
ten Größe eine andere in die Gleichung bringt,
welche um die Helfte des bekannten Coefficienten
größer oder kleiner ist, nachdem der Coefficient ne
gativ oder positiv ist. Demnach setze man

$t =$

$t = y - \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon z + \mu\delta}{\delta}\right)$, so ist

$$t^2 = y^2 - \frac{\varepsilon z + \mu\delta}{\delta} y + \frac{1}{4}\left(\frac{\varepsilon z + \mu\delta}{\delta}\right)^2 u.$$

$$\frac{\varepsilon z + \mu\delta}{\delta} . t = + \frac{\varepsilon z + \mu\delta}{\delta} y - \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon z + \mu\delta}{\delta}\right)^2 u.$$

$$t^2 + \frac{\varepsilon z + \mu\delta}{\delta} . t = y^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{\varepsilon z + \mu\delta}{\delta}\right)^2;$$

Es wird also die allgemeine Gleichung in folgende verwandelt

$$y^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{\varepsilon z + \mu\delta}{\delta}\right)^2 + \frac{\lambda z^2 + \nu\lambda z + \gamma\delta^2}{\delta} = 0 \text{ oder}$$

$$y^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{\varepsilon z}{\delta} + \mu\right)^2 + \frac{\lambda z^2}{\delta} + \frac{\nu\lambda z}{\delta} + \gamma\delta = 0 \text{ oder}$$

$$y^2 - \frac{1}{4}\frac{\varepsilon^2 z^2}{\delta^2} - \frac{1}{2}\frac{\varepsilon z \mu}{\delta} - \frac{1}{4}\mu^2 + \frac{\lambda z^2}{\delta} + \frac{\nu\lambda z}{\delta} + \gamma\delta = 0.$$

und alle Glieder der Gleichung durch $4\delta^2$ multiplizirt

$4\delta^2 y^2 - \varepsilon^2 z^2 - 2\varepsilon z\mu\delta - \delta^2\mu^2 + 4\lambda z^2\delta + 4\nu\lambda z\delta + 4\gamma\delta^3 = 0$ oder

$4\delta^2 y^2 = \varepsilon^2 z^2 + 2\varepsilon\mu\delta z + \delta^2\mu^2 - 4\lambda z^2\delta - 4\nu\lambda\delta z - 4\gamma\delta^3 = 0$ oder

$4\delta^2 y^2 = (\varepsilon^2 - 4\lambda\delta) z^2 + (2\varepsilon\mu\delta - 4\nu\lambda\delta) z + (\delta^2\mu^2 - 4\gamma\delta^3) = 0.$

Man setze $\varepsilon^2 - 4\lambda\delta = a$; $2\varepsilon\mu\delta - 4\nu\lambda\delta = b$ und $\delta^2\mu^2 - 4\gamma\delta^3 = c$, so wird

$4\delta^2 y^2 = az^2 + bz + c$,

wo a, b, c positiv und negativ seyn können, nachdem ε, λ, μ, δ, γ, ν positiv oder negativ waren.

Hier dividire man abermals alle Glieder d Gleichung durch den Coefficienten a des Quadra der unbekannten Große z, so ergiebt sich

$$\frac{4\delta^2 v^2}{a} = z^2 + \frac{bz}{a} + \frac{c}{a}.$$

Um nun hier den zweyten Satz wegzuschaffe könnte man eben so wie bey der ersten Gleichun verfahren. Man kann aber kürzer zum Zweck kom men, wenn man setzet

$$z + \tfrac{1}{2}\left(\frac{b}{a}\right) = \tfrac{1}{2}\left(\frac{b}{a}\right).\frac{x}{n}$$

wo x eine neue veränderliche Größe ist, deren n Theil mit $\frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}\right)$ multipliciret ein Produkt gie

welches der veränderlichen Größe z um $\frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}\right.$

vermehret gleich ist. Aus

$z + \frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}\right).\frac{n}{n}$ erhält man

$$z = \tfrac{1}{2}\left(\frac{b}{a}\right)\frac{x}{n} - \tfrac{1}{2}\left(\frac{b}{a}\right), \text{ mithin}$$

$$z^2 = \tfrac{1}{4}\left(\frac{b}{a}\right)^2\frac{x^2}{n^2} - \tfrac{1}{2}\left(\frac{b}{a}\right)^2\frac{x}{n} + \tfrac{1}{4}\left(\frac{b}{a}\right.$$

$$u^n b \quad \frac{b}{a}.z = \quad \tfrac{1}{2}\left(\frac{b}{a}\right)^2.\frac{x}{n} + \tfrac{1}{4}\left(\frac{b}{a}\right.$$

$$\text{also } z^2 + \frac{b}{a}.z = \tfrac{1}{4}\left(\frac{b}{a}\right)^2\frac{x^2}{n^2} - \tfrac{1}{4}\left(\frac{b}{a}\right)^2.$$

Demnach verwandelt sich vorige Gleichung i folgende

$4\delta^2 y^2 =$

$$\frac{4\delta^2 y^2}{a} = \frac{1}{4}\left(\frac{b}{a}\right)^2 \cdot \frac{x^2}{n^2} - \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \frac{c}{a}$$

und alle Glieder der Gleichung durch a multipliciret

$$4\delta^2 y^2 = \frac{b^2}{4an^2} \cdot x^2 - \frac{b^2}{4a} + c \text{ oder}$$

$$y^2 = \frac{b^2}{16\delta^2 an^2} \cdot x^2 - \frac{b^2}{16\delta^2 a} + \frac{c}{4\delta^2} \text{ oder}$$

$$y^2 = \frac{b^2}{16\delta^2 an^2} \cdot x^2 - \left(\frac{b^2}{16\delta^2 a} - \frac{c}{4\delta^2}\right).$$

Man dividire die Größen in den Klammern durch $\frac{b^2}{16\delta^2 an^2}$, so ergiebt sich

$$\left(\frac{b^2}{16\delta^2 a} - \frac{c}{4\delta^2}\right) : \frac{b^2}{16\delta^2 an^2}$$

$$= \frac{16b^2\delta^2 an^2}{16\delta^2 ab^2} - \frac{16\delta^2 an^2 \cdot c}{4\delta^2 b^2}$$

$$= n^2 - \frac{4an^2 \cdot c}{b^2}.$$

Diesen Quotienten multiplicire man mit dem vorigen Divisor, so wird

$$\frac{b^2}{16\delta^2 a} - \frac{c}{4\delta^2} = \left(n^2 - \frac{4an^2 c}{b^2}\right) \frac{b^2}{16\delta^2 an^2}$$

Demnach wird

$$y^2 = \frac{b^2}{16\delta^2 an}\left(x^2 - n^2 + \frac{4an^2 c}{b^2}\right).$$

Hieraus sieht man also deutlich, daß diese Gleichung entweder zur Ellipse oder zur Hyperbel gehöre, worinn x die Abscisse, y die dazu gehörige Applikate, $\frac{4an^2 c}{b^2} - n^2$ das Quadrat der Helfte

des

des Diameters und $\frac{b^2}{16\delta^2 an^2}$ das Verhältniß d
Hauptdiameters zum konjugirten ist.

Um nun in jedem besondern Falle zu wisse
ob die Gleichung zur Ellipse oder zur Hyperbel ge
höre, so muß man darauf Rücksicht nehmen, o
die Werthe von δ, a, n, c und b positiv oder n
gativ sind. Würden die Werthe von δ, n, un
b positiv oder negativ seyn, so wird die ganze Gle
chung nicht im mindesten geändert werden, we
die Quadrate von diesen Größen allemal positi
sind. Ist die Größe c negativ, so wird zwar $\frac{4an^2}{b^2}$
verändert werden, allein x^2 bleibt immer noch p
sitiv. Wenn aber a negativ ist, so hat man

$$y^2 = -\frac{b^2}{16\delta^2 an^2}\left(x^2 - n^2 - \frac{4an^2c}{b^2}\right) \text{ oder}$$

$$y^2 = \frac{b^2}{16\delta^2 an^2}\left(n^2 + \frac{4an^2c}{b^2} - x^2\right).$$

Weil also in dieser Gleichung x^2 negativ ist, so ge
höret sie zur Ellipse. Hieraus erhellet, daß alle
mal eine Ellipse konstruiret werden muß, wenn
a negativ, im Gegentheil eine Hyperbel, wenn a
positiv ist. Nun war $a = \varepsilon^2 - 4\lambda\delta$; also wird a
negativ, wenn $4\lambda\delta > \varepsilon^2$, aber positiv, wenn $4\lambda\delta$
$< \varepsilon^2$, es mögen die beyden Größen λ und δ ent
weder zugleich positiv oder zugleich negativ seyn.

Wenn demnach folgende Gleichung gegeben ist

$$\delta t^2 + \varepsilon tx + \lambda z^2 + \mu\delta t + \nu\lambda z + \gamma\delta^2 = 0$$

so kömmt es ganz allein auf die drey Coefficienten

δ,

δ, ε, λ an, ob die Gleichung zur Ellipse oder Hyperbel gehöre. Sie gehöret zur Ellipse, wenn das Quadrat ε^2 als das Quadrat des Coefficientem von tz kleiner als das vierfache Produkt $4\delta\lambda$ von den Coefficienten der Quadrate beyder unbekannten Größen t^2 und z^2; hingegen gehöret sie zur Hyperbel, wenn das Quadrat ε^2 größer als $4\delta\lambda$ ist.

§. 125.

Zusatz.

Für die Ellipse ist also

$$y^2 = \frac{b^2}{16\delta^2 a n^2}\left(n^2 + \frac{4an^2c}{b^2} - x^2\right).$$

Wäre nun auch die Größe c negativ, so wird

$$y^2 = \frac{b^2}{16\delta^2 a n^2}\left(n^2 - \frac{4an^2c}{b^2} - x^2\right), \text{ demn.}$$

$$y = \sqrt{\frac{b^2}{16\delta^2 a n^2}}\sqrt{\left(n^2 - \frac{4an^2c}{b^2} - x^2\right)}.$$

Wenn $\frac{4an^2c}{b^2}$ größer als n^2 ist, so wird der ganze Ausdruck $n^2 - \frac{4an^2c}{b^2} - x^2$ negativ, und die Wurzelgröße daraus unmöglich. Aus

$\frac{4an^2c}{b^2} > n^2$ erhält man

$\frac{4ac}{b^2} > 1$ oder

$4ac > b^2$ und

$c > \frac{b^2}{4a}$.

Wenn

Wenn demnach a und c negative Größen sind, un
c größer als $\frac{b^2}{4a}$, so giebt die Gleichung keine
möglichen Werth für y, mithin kann auch in die
sem Falle keine Construktion statt finden.

§. 126.

Aufgabe.

Es ist die Gleichung

$$y^2 = \frac{b^2}{16\delta^2 an^2}\left(n^2 + \frac{4an^2c}{b^2} - x^2\right)$$

gegeben, man soll die Ellipse konstruiren.

Auflösung.

Um die ganz allgemeine Gleichung vom zweyten Grade zur Construktion vorzubereiten, mußte man die zweyten Sätze in den beyden Gleichungen wegschaffen, indem gesetzet wurde

1. $t = y - \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon z}{\delta} + \mu\right)$ und

2. $z + \frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}\right) : \frac{x}{n}$ mithin

$$y = t + \frac{\varepsilon z + \mu\delta}{2\delta} = t + \frac{\varepsilon z}{2\delta} + \frac{1}{2}\mu \text{ und}$$

$$z - \frac{b}{2a} = -\frac{bx}{2an}$$

weil hier a negativ seyn muß. Da nun n ein ganz willkührliche Zahl ist, so kann sie auch negativ genommen werden, und es wird

z—

$$z - \frac{b}{2a} = \frac{bx}{2an}$$

Diese beyden Hülfsgleichungen müssen nun zuerst konstruiret werden, um die Lage der konjugirten Diameter zu finden.

Man ziehe demnach eine unbestimmte gerade Linie ab (Fig. 31.) als die Abscissenlinie für die Werthe von z. Es sey ad = z. Durch d ziehe man dp gegen ad unter einem beliebigen Winkel, welcher als Koordinatenwinkel der beyden Koordinaten z und t gelten soll. Ferner ziehe man ag mit de parallel, und nehme $ag = \frac{1}{2}\mu$. Durch g sey gk mit ab parallel, und nehme ge willkührlich an; ziehe hierauf durch e die Linie ef mit ag parallel, und suche ef nach folgender Proportion

$$\delta : \tfrac{1}{2}\varepsilon = ge : ef,$$

Durch g und f ziehe man die unbestimmte Linie go, und verlängere dp bis sie der go in h begegne, so wird hp die Applikate y vorstellen müssen. Denn man hat $hp = hi + id + dp = ag + dp + ih = \frac{1}{2}\mu + t + ih$. Nun ist aber

$ge : ef = gi : ih$ und
$ge : ef = \delta : \frac{1}{2}\varepsilon$ also
$\delta : \frac{1}{2}\varepsilon = z : ih$ und

$$ih = \frac{\varepsilon z}{2\delta}, \text{ mithin}$$

$$hp = t + \tfrac{1}{2}\mu + \frac{\varepsilon z}{2\delta} = y.$$

Es mag nun der Werth von z seyn, welcher er wolle, so sieht man hieraus, daß die Applikate y allemal in der geraden go anfangen müsse, mithin

muß

muß auch die dazu gehörige Abscisse x auf der ge raden go liegen. Die Gleichung giebt zu erken nen, daß der Anfangspunkt der Abscissen der Mit telpunkt der Ellipse ist, also wird auch in go der Mittelpunkt der Ellipse liegen, mithin ist go die Lage des Hauptdiameters, welcher den konjugirten Diameter unter den Winkel ghp schneiden wird. Um also den Mittelpunkt der Ellipse zu finden, be trachte man die zweyte Hülfsgleichung

$$z = \frac{b}{2a} = \frac{bx}{2an};$$

demnach nehme man $am = z - \frac{b}{2a}$, so ist

$$md = ad - am = z - \frac{b}{2a} = \frac{bx}{2an};$$

Nun ziehe man durch m die Linie lc mit he paral lel, so wird der Punkt c der Mittelpunkt der El lipse seyn. Denn je mehr sich die gerade Linie ph der geraden lc nähert, desto mehr nähert sich der Werth md der Null; fällt endlich ph mit cl zu sammen, so verschwindet $dm = \frac{bx}{2an}$ gänzlich oder wird $= o$. Es kann aber $\frac{bx}{2an}$ nicht $= o$ werden woferne nicht $x = o$ ist; demnach ist c der Mit telpunkt der Ellipse. Hieraus folgt also weiter, daß $ch = x$ oder eine Abscisse und $hp = y$ eine dazu gehörige Applikate. Weil nun x bestimmt ist, so kann man auch die willkührliche Größe n bestimmen. Denn man hat

dm =

$dm = \frac{bx}{2an} = ni$ und

$\frac{b}{2a} = am = gn$, so ist auch

$ni = \frac{gn.ch}{n}$, folglich

$n = \frac{gn.ch}{ni}$. Weiter ist

$ni : gn = ch : gc$, und

$gc = \frac{gn.ch}{ni}$, demnach

$gc = n$;

es wird also der Werth von n durch die Construktion bestimmt.

Zuletzt hat man nur noch nöthig, die Grössen der beyden konjugirten Diameter zu suchen. Vergleichet man die veränderte Gleichung

$$y^2 = \frac{b^2}{16\delta^2 an^2}(n^2 + \frac{4an^2c}{b^2} - x^2)$$

mit der Gleichung für die Ellipse

$$y^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2}(\tfrac{1}{4}\alpha^2 - x^2).$$

so ergiebt sich

$\frac{1}{4}\alpha^2 = n^2 + \frac{4an^2c}{b^2}$ und

$\alpha^2 = 4n^2 + \frac{16an^2c}{b^2}$, folglich

$$\alpha = V(4n^2 + \frac{16an^2c}{b^2})$$

=

$$= \frac{2n}{b} \sqrt{(b^2 + 4ac)}.$$

Ferner ist

$$\frac{\beta^2}{a^2} = \frac{b^2}{16\delta^2 an^2} \text{ oder.}$$

$$\beta^2 = \frac{b^2}{16\delta^2 an^2} \cdot a^2$$

$$= \frac{b^2}{16\delta^2 an^2} \cdot \left(4n^2 + \frac{16an^2c}{b^2}\right)$$

$$= \frac{b^2}{4\delta^2 a} + \frac{c}{\delta^2} \text{ und}$$

$$\beta = \sqrt{\left(\frac{b^2}{4\delta^2 a} + \frac{c}{\delta^2}\right)}.$$

Weil nun vermöge der Construktion nicht allei die Lage der beyden konjugirten Diameter, son dern auch die Größe derselben durch Rechnung ge funden ist, so läßt sich vermöge des §. 106. die El lipse verzeichnen.

§. 127.

Zusatz.

Wenn in der Gleichung

$$y^2 = \frac{b^2}{16\delta^2 an^2}\left(n^2 + \frac{4an^2c}{b^2} - x^2\right)$$

beyde Diameter einander gleich seyn sollen, so wird erfordert, daß

$b^2 = 16\delta^2 an^2$, mithin

$n^2 = \frac{b^2}{16\delta^2 a}$ sey.

Wäre

Wäre ausserdem der Coordinatenwinkel gcn ein rechter Winkel, so muß die Gleichung durch einen Kreis konstruiret werden. Nun ist aber

$$ng^2 = gc^2 + cn^2 \text{ oder}$$
$$am^2 = gc^2 + cn^2$$
$$cg^2 = n^2 = \frac{b^2}{16\delta^2 a}, \quad am^2 = \frac{b^2}{4a^2} \text{ und}$$
$$ge : ef = gn : nc \text{ oder}$$
$$\delta : \tfrac{1}{2}\varepsilon = \frac{b}{2a} : nc \text{ und}$$
$$nc = \frac{\varepsilon b}{4a\delta}, \text{ folglich}$$
$$nc^2 = \frac{\varepsilon^2 b^2}{16a^2\delta^2}, \text{ und daher}$$
$$\frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{16\delta^2 a} + \frac{\varepsilon^2 b^2}{16a^2\delta^2} \text{ oder}$$
$$\frac{4\delta^2 b^2}{16a^2\delta^2} = \frac{ab^2}{16a^2\delta^2} + \frac{\varepsilon^2 b^2}{16a^2\delta^2} \text{ oder}$$
$$4\delta^2 b^2 = ab^2 + \varepsilon^2 b^2 \text{ oder}$$
$$4\delta^2 = a + \varepsilon^2.$$

In der Ellipse ist nun a negativ, mithin

$$4\delta^2 = \varepsilon^2 - a \text{ oder}$$
$$a = \varepsilon^2 - 4\delta^2.$$

Es ist aber $a = \varepsilon^2 - 4\lambda\delta$, folglich

$$\varepsilon^2 - 4\lambda\delta = \varepsilon^2 - 4\delta^2 \text{ oder}$$
$$\lambda\delta = \delta^2 \text{ und}$$
$$\lambda = \delta.$$

Wenn also in der Gleichung

$$\delta t^2 + \varepsilon tz + \lambda z^2 + \mu\delta t + \nu\lambda z + \gamma\delta^2 = 0$$

nicht allein $\varepsilon^2 - 4\lambda\delta$ eine negative Gräße, sondern auch $\lambda = \delta$, und überdem der Coordinatenwinkel

ein

ein rechter ist, so muß die Gleichung durch ein Kreis konstruiret werden.

§. 128.

Aufgabe.

Es ist die Gleichung

$$y^2 = \frac{b^2}{1 \epsilon \delta^2 an^2}\left(x^2 - n^2 + \frac{4an^2c}{b^2}\right)$$

gegeben, man soll die Hyperbel konstruiren.

Auflösung.

Um die Lage der konjugirten Diameter zu erhalten, muß man auch hier, wie bey der Ellipse die beyden Hülfsgleichungen zuerst konstruiren, nehmlich

1. $y = t + \frac{1}{4}\mu + \frac{\varepsilon z}{2\delta}$ und

2. $z + \frac{b}{2a} = \frac{bx}{2an}$.

Was die erste Gleichung betrift, so wird sie eben so wie bey der Ellipse konstruiret. So bedeute (Fig. 32.) $ad = z$, $dp = t$, $ag = \frac{1}{2}\mu$. Nun nehme man noch gc willkührlich an, ziehe durch die Linie cm mit ga parallel und bestimme cm nach folgender Proportion

$$\delta : \tfrac{1}{2}\varepsilon = gc : cm$$

hierauf ziehe man durch m und g die unbestimmte Linie mo und verlängere ip, bis sie mo in h treffe, so wird $hp = y$ seyn. Denn die beyden Dreyecke gmc und gih sind einander ähnlich, also

g

$gc : cm = gi : ih$ oder
$\delta : \frac{1}{2}\varepsilon = z : ih$, folglich

$$ih = \frac{\varepsilon z}{2\delta}, \text{ und}$$

$$hp = hi + id + dp = t + \tfrac{1}{2}\mu + \frac{\varepsilon z}{2\delta} = y.$$

Vermöge der zweyten Hülfsgleichung nehme man

$$al = \frac{b}{2a}, \text{ so hat man}$$

$$dl = da + al = z + \frac{b}{2a} = \frac{bx}{2an}$$

demnach wird f der Mittelpunkt der Hyperbel und fh eine Abscisse $= x$ seyn. Weil nun $dl = \frac{bx}{2an}$ und $\frac{b}{2a} = al$ und $x = fh$ ist, so kann auch n bestimmt werden, indem $dl = \frac{al.fh}{n}$, folglich $n = \frac{al.fh}{dl}$ ist. Nun hat man $ie : fh = ge : gf$ oder
$dl : fh = al : gf$ folglich

$$gf = \frac{al.fh}{dl} = n.$$

Uebrigens wird es nun leicht seyn, die Größen der beyden konjugirten Diameter zu finden. Hat man diese gefunden, so wird sodann vermöge des §. 116. die Hyperbel beschrieben werden können.

§. 129.

Zusatz.

Bey einem jeden bestimmten Beyspiele, w ches eine Gleichung einer krummen Linie vom zw Grade ausdruckt, kann man also sehr leicht be theilen, ob selbiges zu einer Ellipse oder zu eine Kreise oder zu einer Hyperbel gehöret. Aus d bisherigen sieht man, daß es in der allgemein Gleichung

$$\delta t^2 + \varepsilon tz + \lambda z^2 + \mu \delta t + \nu \lambda z + \gamma \delta^2 = 0$$

ganz allein auf die drey ersten Sätze, welche zw Dimensionen der unbekannten Größen enthalt ankomme. Sind nemlich die Coefficienten δ, ε so beschaffen, daß $\varepsilon^2 - 4\delta\lambda$ eine positive Größe so gehöret die Linie zu einer Hyperbel. Ist hin gen $\varepsilon^2 - 4\delta\lambda$ negativ, so ist die Linie eine Ellip ist ausserdem noch $\delta = \lambda$ und der Koordinatenwi kel ein rechter, so ist die Linie ein Kreis.

§. 130.

Zusatz.

Wenn $\varepsilon = 0$ seyn mithin tz fehlen sollte, so wir auch gc (F. 31.) mit gn in gerader Linie fallen müsse indem $ef = 0$ ist, mithin würde gk ein Diam ter der krummen Linie seyn. Daraus folgt, da die Abscissen x mit den Abscissen z und die Appl katen y mit den Applikaten t parallel gehen. We nun $n = gn = am = \frac{b}{2a}$ wird, so ergiebt sich

$$z + \frac{b}{2a} = \frac{bx}{2an} = \frac{bx}{2a} \times \frac{1}{n} = x.$$

Es

Es verschwindet also schon das zweyte Glied der Gleichung in Rücksicht der z, ohne daß man nöthig hat die willkührliche Größe n einzuführen.

§. 131.

Zusatz.

Wenn in der gegebenen Gleichung die eine unbekannte Größe z. E. t weggeschaft wäre, und es bliebe nun nur noch das Quadrat von z, so wäre es nun nicht nöthig in der andern veränderten Gleichung das zweyte Glied wegzubringen; jedoch muß aber noch $z = \frac{d}{n} x$ gesetzet werden, wo $\frac{d}{n}$ ein willkührlicher Bruch ist, der aber in der Construktion bestimmt werden muß.

§. 132.

Zusatz.

Sollte in der allgemeinen Gleichung eines von den Quadraten der unbekannten Größen t und z also entweder t^2 oder z^2 fehlen, so muß die Gleichung allemal durch eine Hyperbel konstruiret werden, oder die Gleichung gehöret zu gar keiner krummen Linie. Denn wäre δ oder $\lambda = o$, so wird alsdenn $\varepsilon^2 - 4\delta\lambda = \varepsilon^2$ allemal eine positive Größe.

§. 133.

Zusatz.

Wenn $\varepsilon^2 - 4\delta\lambda = o$, mithin $\varepsilon^2 = 4\delta\lambda$ seyn sollte, so wird sich schon z^2 in der veränderten

Gleichung nicht mehr befinden, wenn t in der allgemeinen Gleichung weggeschaft ist. Denn alsdenn ist $a = \varepsilon^2 - 4\delta\lambda = 0$, mithin

$$4\delta^2 y^2 = bz + c \text{ (§. 124.)}.$$

Aus dieser Gleichnng ergiebt sich

$$y^2 = \frac{bz+c}{4\delta^2}.$$

Nun setze man $\frac{bz+c}{4\delta^2} = nx$, so wird

$$y^2 = nx.$$

Hieraus erhellet also. daß, wenn $\varepsilon^2 - 4\delta\lambda$, die gegebene Gleichung durch eine Parabel konstruiret werden muß. Man hat demnach hier vor allen Dingen die beyden Gleichungen zu konstruiren:

1. $t + \frac{1}{2}\mu + \frac{\varepsilon z}{2\delta} = y$ und

2. $\frac{bz+c}{4\delta^2} = nx.$

Aus der zweyten Gleichung erhält man

$$bz + c = 4\delta^2 nx \text{ und}$$

$$z + \frac{c}{b} = \frac{4\delta^2 nx}{b}.$$

Weil nun die erste Gleichung die Lage der Applikaten und diese den Anfangspunkt der Abscissen bestimmt, so kann auch die willkührliche Größe n gefunden werden, und es wird alsdenn leicht seyn, die Parabel zu verzeichnen.

§. 134.

Aufgabe.

Es fehlen in der allgemeinen Gleichung

$$\delta t^2+\varepsilon tz+\lambda z^2+\mu\delta t+\nu\lambda z+\gamma\delta^2=0$$

die Quadrate der unbekannten Größen t^2 und z^2, man soll die Gleichung vorbereiten, daß sie konstruiret werden kann.

Auflösung.

Weil die Quadrate von t^2 und z^2 fehlen, so erhält die Gleichung folgende allgemeine Gestalt

$$\varepsilon tz+\mu\delta t+\nu\lambda z+\gamma\delta^2=0.$$

Man dividire alle Glieder der Gleichung durch ε,

$$tz+\frac{\mu\delta}{\varepsilon}t+\frac{\nu\lambda}{\varepsilon}z+\frac{\gamma\delta^2}{\varepsilon}=0 \text{ oder}$$

$$(t+\frac{\nu\lambda}{\varepsilon})z+\frac{\mu\delta}{\varepsilon}.t+\frac{\gamma\delta^2}{\varepsilon}=0.$$

Nun setze man $t+\frac{\nu\lambda}{\varepsilon}=y$, und

$y-\frac{\nu\lambda}{\varepsilon}=t$, so ergiebt sich

$$yz+\frac{\mu\delta}{\varepsilon}(y-\frac{\nu\lambda}{\varepsilon})+\frac{\gamma\delta^2}{\varepsilon}=0$$

$$\text{oder } yz+\frac{\mu\delta}{\varepsilon}y-\frac{\mu\delta\nu\lambda}{\varepsilon}+\frac{\gamma\delta^2}{\varepsilon}=0$$

$$\text{und } (z+\frac{\mu\delta}{\varepsilon})y-\frac{\mu\delta\nu\lambda}{\varepsilon^2}+\frac{\gamma\delta^2}{\varepsilon}=0.$$

Ferner nehme man $z+\frac{\mu\delta}{\varepsilon}=x$, mithin

$$xy - \frac{\mu\delta\nu\lambda}{\varepsilon^2} + \frac{\gamma\delta^2}{\varepsilon} = 0 \text{ und}$$

$$xy = \frac{\mu\delta\nu\lambda}{\varepsilon^2} - \frac{\gamma\delta^2}{\varepsilon}.$$

Hieraus sieht man, daß diese Gleichung zur Hyperbel zwischen ihren Asymptoten gehöret. Die Abscissen x werden aus dem Mittelpunkt auf der einen Asymptote und die dazu gehörigen Applikaten mit der andern Asymptote parallel genommen. Die Potenz der Hyperbel ist $= \frac{\mu\delta\nu\lambda}{\varepsilon^2} - \frac{\gamma\delta^2}{\varepsilon}$.

§. 135.

Aufgabe.

Es ist die Gleichung

$$xy = \frac{\mu\delta\nu\lambda}{\varepsilon^2} - \frac{\gamma\delta^2}{\varepsilon}$$

gegeben, man soll die Hyperbel zwischen ihren Asymptoten konstruiren.

Auflösung.

Um den Mittelpunkt der Hyperbel und die Lage der Asymptoten zu erhalten, müssen die beyden Hülfsgleichungen

$$y = t + \frac{\nu\lambda}{\varepsilon} \text{ und}$$

$$x = z + \frac{\mu\delta}{\varepsilon}$$

zuerst konstruiret werden. Zu dem Ende ziehe man die unbestimmte gerade Linie ge (Fig. 33.), nehme

nehme de = z und ziehe ec gegen de unter einem beliebigen Winkel, so wird ec = t seyn müssen. Durch den Punkt d ziehe man da mit ce parallel, und mache da = $\frac{\nu\lambda}{\varepsilon}$; durch a ziehe man hierauf fb mit ge parallel, und verlängere ce bis b, so wird bc = y seyn. Denn es ist cb = ce + eb = ce + da = t + $\frac{\nu\lambda}{\varepsilon}$ = y. Um nun x zu erhalten, mache man dg = $\frac{\mu\delta}{\varepsilon}$, und ziehe gf mit cb parallel, so ist fb = x. Denn es ist eg = ed + dg = ab + af = z + $\frac{\mu\delta}{\varepsilon}$ = x. Weil nun f der Mittelpunkt der Hyperbel und fh und fb die Asymptoten sind, so läßt sich vermöge der Gleichung xy = $\frac{\mu\delta\nu\lambda}{\varepsilon}$ − $\frac{\gamma\delta}{\varepsilon}$ die Hyperbel verzeichnen.

§. 136.

Zusatz.

Aus dem bisher angeführten erhellet zur Genüge, daß alle Gleichungen vom zweyten Grade, welche zwey veränderliche Größen enthalten, durch Kegelschnitte konstruiret werden können. Es muß nemlich eine solche Gleichung durch eine Ellipse konstruiret werden, wenn das vierfache Produkt aus dem Coefficienten des Quadrats der veränderlichen Größe t in den Coefficienten des Quadrats der veränderlichen Größe z von dem Quadrate des Coefficienten von tz subtrahiret eine negative Größe zum Reste

übrig läßt. In diesem Falle wird die krumme Lin besonders ein Kreis, wenn der Coefficiente von dem Coefficienten von z^2 gleich, ausserdem ab der Coordinatenwinkel ein rechter ist. Giebt hi gegen die erwähnte Subtraktion eine positive Grö so muß die Gleichung durch eine Hyperbel konstru ret werden. Verschwindet endlich gar die Sub traktion oder wird der Rest $= 0$, so wird eine Pa rabel konstruiret.

Viertes Kapitel.

Von den trigonometrischen Größen.

§. 137.

Erklärung.

Es sey acb (Fig. 44.) ein spitzer Winkel, und mit einem willkührlichen Halbmesser ac zwischen den Schenkeln desselben ein Kreisbogen beschrieben; hierauf lasse man von dem Punkte b auf den Schenkel ac die senkrechte Linie bd herab, so heißt bd der Sinus des Winkels bcd oder des Bogens ab. Das Stück ad heißt ferner der Sinus versus des Winkels acb oder des Bogens ab. Weiter ziehe man die Tangente ea, so nennt man auch ae die Tangente des Winkels ace oder des Bogens ab, und ec die Sekante des Winkels acb oder des Bogens ab. Aus eben dem Grunde heißen auch die Linien bg, gf, fh und hc der Sinus, der Sinus versus die Tangente und Sekante des

Winkels bcg oder des Bogens bf. Weil aber der Winkel bcg mit dem Winkel acb, oder der Bogen bf mit dem Bogen ab einen rechten Winkel macht, so heißen auch die Linien bg, gf, fh und hc der Cosinus, Cosinus versus, Cotangente Cosekante des Winkels acb oder des Bogens ab. Bezeichnet man also irgend einen Kreisbogen mit z, so sind nun folgende Ausdrücke deutlich sin. z; sin. v. z; tang. z; sec. z; cos. z; cos. v. z; cot. z; consec. z.

§. 138.

Zusatz.

Wenn die halbe Peripherie für den Halbmesser = 1 mit π angedeutet wird, so ist sin. $\frac{1}{2}\pi = 1$; cos. $\frac{1}{2}\pi = 0$; tang. $\frac{1}{2}\pi = \infty$ und sec $\frac{1}{2}\pi = \infty$; cot. $\frac{1}{2}\pi = 0$ und cosec. $\frac{1}{2}\pi = 1$; ferner sin. $\pi = 0$; tang. $\pi = -0$; sec. $\pi = -1$; cos. $\pi = -1$; cot. $\pi = -\infty$ und cosec. $\pi = -\infty$; weiter sin. $\frac{3}{2}\pi = -1$; tang. $\frac{3}{2}\pi = \infty$; sec. $\frac{3}{2}\pi = \infty$; cos. $\frac{3}{2}\pi = -0$; cot. $\frac{3}{2}\pi = -0$; cosec. $\frac{3}{2}\pi = -1$; endlich sin. $2\pi = -0$; tang $2\pi = 0$; sec. $2\pi = 1$; cosin. $2\pi = 1$; cot. $2\pi = \infty$; cosec. $2\pi = \infty$.

§. 136.

Zusatz.

Die gleichnahmigten trigonometrischen Linien sind für zwey Winkel, welche sich zu 180 Grade ergänzen, gleich groß, wenn der einzige Quersinus ausgenommen wird. Bedeutet nemlich z einen spitzen Winkel, so hat man

$$\sin.(180^\circ - z) = \sin. z$$
$$\text{tang.}(180^\circ - z) = -\text{tang.} z$$
$$\text{sec.}(180^\circ - z) = -\text{sec.} z$$
$$\text{cos.}(180^\circ - z) = -\text{cos.} z$$
$$\text{cot.}(180^\circ - z) = -\text{cot.} z$$
$$\text{cosec.}(180^\circ - z) = \text{co sec.} z.$$

§. 140.

Zusatz.

In dem rechtwinklichten Dreyecke bdc (Fig. 34.) hat man

$$bd = \sqrt{(bc^2 - dc^2)} = \sqrt{(bc^2 - bg^2)}$$

Setzt man den Halbmesser $cb = 1$, so wird

1. $\sin. z = \sqrt{(1 - \text{cos.} z^2)}$.

2. Es ist $ad = ac - cd = ac - bg$, folglich $\sin. v. z = 1 - \text{cos.} z$.

3. Die beyden Dreyecke bdc und eac sind einander ähnlich; demnach
$dc : db = ac : ae$ oder
$\text{cos.} z : \sin. z = 1 : \text{tang } z$, mithin
$$\text{tang.} z = \frac{\sin. z}{\text{cos.} z}.$$

4. Auch hat man
$cd : ca = cb : ce$ oder
$\text{cos.} z : 1 = 1 : \text{sec.} z$, also
$$\text{sec.} z = \frac{1}{\text{cos.} z}.$$

§.

5. Aus der Aehnlichkeit der beyden Dreyecke bcg und hcf ergiebt sich
cg : gb = cf : fh, oder
sin. z : cos. z = 1 : cot. z, und
$\cot. z = \frac{\cos. z}{\sin. z}$.

6. Eben so hat man
cg : cf = cb : ch oder
sin. z : 1 = 1 : cosec. z, also
$\text{cosec. } z = \frac{1}{\sin. z}$.

7. Es ist fg = fc − gc; mithin cos. v. z = 1 − sin. z.

§. 141.

Zusatz.

Man bezeichne für den Halbmesser = 1 den Sinus, Sinus versus, die Tangente, Sekante, den Cosinus, Cosinus versus, die Tangente und Cosekante mit ſ, s, t, σ, c, k, λ, μ; für den Halbmesser r aber seyn diese trigonometrischen Linien nach der Ordnung S, ϱ, T, Σ, C, K, N, M, so hat man S = rſ, ϱ = sr, T = rt, Σ = σr, C = cr, K = kr, N = λy und M = μr.

§. 142.

Zusatz.

Es sind die Sinus und Cosinus zweyer Winkel α und β (Fig. 35.) bekannt, man sucht die

Sinus

Sinus und Cosinus der Summe und der Diff
renz beyder Winkel.

Auflösung.

Es sey bd der Sinus des Winkels α, a
der Cosinus desselben; eben so sey hg = sin.
ag = cos. β, und bc = sin. ($\alpha+\beta$). Aus
lasse man df auf ag und de auf bc senkrecht fa
len, so sind die Winkel bey i in beyden rechtwin
lichten Dreyecken aic und bid einander gleich, m
hin auch der Winkel ebd = β und daher beyd
Dreyecke bed und ahg einander ähnlich; es ist al

ah : hg = ad : df oder
1 : sin. β = cos. α : df = (ec), und
ec = sin. β. cos. α.

Ferner ist auch

ah : ag = bd : be oder
1 : cos. β = sin. α : be und
be = cos. β sin. α,

daraus ergiebt sich

be + ec = sin. ($\alpha+\beta$) = sin. β. cos. α +
cos. β. sin. α.

Ferner hat man

ah : ag = ad : af oder
1 : cos. β = cos. α : af und
af = cos. β. cos. α.

Auch ist

ah : hg = bd : de oder
1 : sin. β = sin. α : de = (cf) und
cf = sin. β. sin. α, mithin
af − cf = cos. ($\alpha+\beta$) = cos. β. cos. α −
sin. β. sin. α.

Eben

Eben so bedeute bac = (Fig. 36.) α und bag = β, so ist gac = $\alpha - \beta$, gf = sin. $(\alpha - \beta)$, af = cos. $(\alpha - \beta)$, be = sin. α, ae = cos. α, ig = sin. β und ai = cos. β. Durch den Punkt i ziehe man id auf ac, und ih auf die verlängerte gf senkrecht, verlängere auch ab bis hf und ak in k zusammenstoßen, so ist der Winkel ikh des rechtwinklichten Dreyecks ikg dem Winkel abe des rechtwinklichten Dreyecks abe gleich, mithin auch der Winkel bae = igh, und das Dreyeck abe dem Dreyeck ihg ähnlich; hieraus erhellet, daß

ab : be = ai : id oder

1 : sin. α = cos. β : id = (hf), und

hf = sin. α. cos. β;

Auch ist ab : ae = ig : hg oder

1 : cos. α = sin. β : hg und

hg = cos. α. sin. β, mithin

gf = hf − hg = sin. α. cos. β − cos. α. sin β.

Ferner hat man

ab : be = ig : ih oder

1 : sin. α = sin. β : ih = (df) also

df = sin. α. sin. β

ab : ae = ai : ad oder

1 : cos. α = cos. β : ad und

ad = cos. α. cos. β, mithin

ad + df = cos. $(\alpha - \beta)$ = sin. α. sin. β + cos. α. cos. β.

§. 143.

Zusatz.

Ist der Winkel α = β, so wird sin. $(\alpha + \beta)$ = 2α = 2 sin. α. cos. α, und cos. 2α = cos. α^2 −

$\alpha^2 - \text{sin.}\,\alpha^2$. Es ist auch $\text{cos.}(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta) = 2.\text{cos.}\,\alpha.\text{cos.}\,\beta$. Nimmt man $\alpha = \beta$ mithin $\alpha-\beta = 0$, und $\text{cos.}(\alpha-\beta)=$ so wird $\text{cos.}(\alpha+\beta) = \text{cos.}\,2\alpha + 1 = 2\,\text{cos}$ Man setze $\alpha = \frac{1}{2}\delta$, folglich $2\alpha = \delta$, und $\delta + 1 = 2(\text{cos.}\,\frac{1}{2}\delta)^2$, und $\text{cos.}\,\frac{1}{2}\delta = V(\frac{1+\text{co}}{2}$

Weiter hat man $1 - (\text{cos.}\,\frac{1}{2}\delta)^2 = (\text{sin.}\,\frac{1}{2}\delta)^2$ 140.) $= \frac{1-\text{cos.}\,\delta}{2}$, folglich $\text{sin.}\,\frac{1}{2}\delta = V(\frac{1-\text{cos}}{2}$

§. 144.

Zusatz.

Weil $\text{tang.}(\alpha+\beta) = \frac{\text{sin.}(\alpha+\beta)}{\text{cos.}(\alpha+\beta)}$ (§. 14

so hat man auch $\text{tang.}(\alpha+\beta) = \frac{\text{sin.}\beta.\text{cos.}\alpha+\text{cos}\beta.}{\text{cos.}\beta.\text{cos.}\alpha-\text{sin.}\beta.}$

Dividiret man nun Zähler und Nenner durch co $\text{cos.}\,\alpha$, so erhält man

$$\text{tang.}(\alpha+\beta) = \frac{\text{tang.}\,\beta+\text{tang.}\,\alpha}{1-\text{tang}\,\beta.\text{tang.}\alpha}, \text{ und}$$

$$\text{cotang.}(\alpha+\beta) = \frac{1-\text{tang.}\,\beta.\,\text{tang.}\,\alpha}{\text{tang.}\,\beta+\text{tang.}\,\alpha}.$$

Auf eben diese Art ergiebt sich

$$\text{tang.}(\alpha-\beta) = \frac{\text{tang.}\,\alpha-\text{tang.}\,\beta}{1+\text{tang}\,\alpha.\text{tang.}\beta} \text{ und}$$

$$\text{cotang.}(\alpha-\beta) = \frac{1+\text{tang.}\,\alpha.\,\text{tang.}\,\beta}{\text{tang.}\alpha-\text{tang.}\,\beta}.$$

Ist der Winkel $\alpha = \beta$, so wird

$$\text{tang. } 2\alpha = \frac{2 \text{ tang } \alpha}{1 - \text{tang. } \alpha^2} \text{ und}$$

$$\text{cot. } 2\alpha = \frac{1 - \text{tang. } \alpha^2}{2 \text{ tang. } \alpha}.$$

§. 145.

Zusatz.

Weil $\text{sin. } \frac{1}{2}\delta = \sqrt{\frac{1 - \text{cos. } \delta}{2}}$, und $\text{cos. } \frac{1}{2}\delta = \sqrt{\frac{1 + \text{cos. } \delta}{2}}$; aber $\text{tang. } \frac{1}{2}\delta = \frac{\text{sin. } \frac{1}{2}\delta}{\text{cos. } \frac{1}{2}\delta}$, so hat man auch

$$\text{tang. } \frac{1}{2}\delta = \sqrt{\frac{1 - \text{cos. } \delta}{1 + \text{cos. } \delta}}, \text{ und}$$

$$\text{cot. } \frac{1}{2}\delta = \sqrt{\frac{1 + \text{cos. } \delta}{1 - \text{cos. } \delta}}.$$

Aus $\text{tang. } \frac{1}{2}\delta = \frac{\text{sin. } \frac{1}{2}\delta}{\text{cos. } \frac{1}{2}\delta}$ wird auch

$$\text{tang. } \frac{1}{2}\delta \text{, cos. } \frac{1}{2}\delta = \text{sin. } \frac{1}{2}\delta;$$

nun war aber $2\text{sin. } \frac{1}{2}\delta = 1 - \text{cos. } \delta$, mithin

$$2\text{. sin. } \tfrac{1}{2}\delta^2 = 2\text{sin. } \tfrac{1}{2}\delta\text{. tang. } \tfrac{1}{2}\delta\text{. cos. } \tfrac{1}{2}\delta$$
$$= \text{sin. } \delta\text{. tang. } \tfrac{1}{2}\delta \text{ (§. 141.) und}$$

$1 - \text{cos. } \delta = \text{sin. } \delta\text{. tang. } \frac{1}{2}\delta$; daraus wird

$$\text{tang. } \frac{1}{2}\delta = \frac{1 - \text{cos. } \delta}{\text{sin. } \delta}.$$

§. 146.

Zusatz.

Aus $\text{tang.}\,\alpha = \frac{\text{sin.}\,\alpha}{\text{cos.}\,\alpha}$ hat man auch

$$\text{tang.}\,\alpha = \frac{\text{sin.}\,\alpha}{\sqrt{(1-\text{sin.}\,\alpha)}} \text{ und}$$

$\text{tang.}\,\alpha^2 - \text{tang.}\,\alpha^2\,\text{sin.}\,\alpha^2 = \text{sin.}\,\alpha^2$, mithi

$\text{tang.}\,\alpha^2 = (1 + \text{tan.}\,\alpha^2)\,\text{sin.}\,\alpha^2$, und

$$\text{sin.}\,\alpha^2 = \frac{\text{tang}\,\alpha^2}{1+\text{tang.}\,\alpha^2}. \text{ und}$$

$$\text{sin.}\,\alpha = \frac{\text{tang.}\,\alpha}{\sqrt{(1+\text{tang.}\,\alpha^2)}}.$$

Ferner ist auch $\text{tang.}\,\alpha = \frac{\sqrt{(1-\text{cos.}\,\alpha^2)}}{\text{cos.}\,\alpha}$, u. daß

$\text{tang.}\,\alpha^2.\,\text{cos.}\,\alpha^2 = 1 - \text{cos.}\,\alpha^2$;

$(1 + \text{tang.}\,\alpha^2)\,\text{cos.}\,\alpha^2 = 1$

$$\text{cos.}\,\alpha^2 = \frac{1}{1+\text{tang.}\,\alpha^2} \text{ und}$$

$$\text{cos.}\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{(1+\text{tang.}\,\alpha^2)}}.$$

Fünftes Kapitel.

Von den geometrischen Oertern und von der Auflösung einiger geometrischen Aufgaben.

§. 147.

Erklärung.

Wenn in einer Gleichung, welche zu einer unbestimmten Aufgabe gehöret, nur zwey unbekannte Größen enthalten sind, so heißt die Linie, welche die Gleichung ausdruckt, der geometrische Ort der Aufgabe (locus geometricus).

Anmerkung. Diese Benennung ist vorzüglich von den Alten gebraucht worden. Sie nannten nemlich die gerade Linie und den Kreis loca plana; die Linie von der zweyten Ordnung, den Kreis nicht mitgerechnet loca solida, weil hier die krummen Linien von dem Kegel als einem Körper entstunden.

§. 148.

Aufgabe.

Es ist in dem Dreyecke acb (Fig. 37.) die Linie ab gegeben, man sucht die Spitze c, so daß die beyden Seitenlinien ac und cb in dem gegebenen Verhältnisse $\alpha : \beta$ sich befinden.

Auflösung.

Man lasse von c die Linie cd auf ab senkrec herab, setze $ad = u$, $dc = z$ und die bekannte ab γ, so ist $db = ab - ad = \gamma - u$. Die beyden rec winklichten Dreyecke acd und dcb geben

$ac^2 = cd^2 + ad^2$ und
$cb^2 = cd^2 + db^2$ oder
$ac^2 = z^2 + u^2$ und
$cb^2 = z^2 + (\gamma - u)^2$ oder
$cb^2 = z^2 + \gamma^2 - 2\gamma u + u^2$ und daher
$ac = \sqrt{(z^2 + u^2)}$ und
$cb = \sqrt{(z^2 + \gamma^2 - 2\gamma u + u^2)}$

Nun soll nach der Voraussetzung
$ac : cb = \alpha : \beta$ seyn, also hat man auch
$\alpha : \beta = \sqrt{(z^2 + u^2)} : \sqrt{(z^2 + \gamma^2 - 2\gamma u + u^2)}$ und
$\alpha^2 : \beta^2 = z^2 + u^2 : z^2 + \gamma^2 - 2\gamma u + u^2$

hieraus ergiebt sich

$\alpha^2 z^2 + \alpha^2 \gamma^2 - 2\alpha^2 \gamma u + \alpha^2 u^2 = \beta^2 z^2 + \beta^2$
oder
$\alpha^2 z^2 + \alpha^2 \gamma^2 - 2\alpha^2 \gamma u + \alpha^2 u^2 - \beta^2 z^2 - \beta^2 u^2 =$
oder
$(\alpha^2 - \beta^2) z^2 + (\alpha^2 - \beta^2) u^2 - 2\alpha^2 \gamma u + \alpha^2 \gamma^2 =$

Daß diese gefundene Gleichung einen Kreis aus drucket, erhellet daraus, weil der Coefficiente von u^2 dem Coefficienten von z^2 gleich groß ist. Wenn in dem Mittelpunkte der Anfangspunkt der Ab scissen angenommen wird, und δ den Durchmesse des Kreises bedeutet, so hat man $y^2 = \frac{1}{4}\delta^2 - x^2$ und auf diese Gleichung muß die vorhin gefunden zurückgebracht werden. Setzt man nun statt z die Größe y, so wird

$\alpha^2 -$

$$(\alpha^2-\beta^2)u^2-2\alpha^2\gamma u+(\alpha^2-\beta^2)\gamma^2+\alpha^2\gamma^2=0,$$

und

$$u^2-\frac{2\alpha^2\gamma}{\alpha^2-\beta^2}\,u+\gamma^2+\frac{\alpha^2\gamma^2}{\alpha^2-\beta^2}=0 \text{ oder}$$

$$u^2-\frac{2\alpha^2\gamma}{\alpha^2-\beta^2}\,u=-\frac{\alpha^2\gamma^2}{\alpha^2-\beta^2}-\gamma^2.$$

Ferner sey $u-\frac{\alpha^2\gamma}{\alpha^2-\beta^2}=x$, also

$$u^2-\frac{2\alpha^2\gamma}{\alpha^2-\beta^2}\,u+\frac{\alpha^4\gamma^2}{(\alpha^2-\beta^2)^2}=x^2 \text{ oder}$$

$$u^2-\frac{2\alpha^2\gamma}{\alpha^2-\beta^2}\,u=x^2-\frac{\alpha^4\gamma^2}{(\alpha^2-\beta^2)^2}.$$

Demnach wird die vorige Gleichung

$$x^2-\frac{\alpha^4\gamma^2}{(\alpha^2-\beta^2)^2}=-\frac{\alpha^2\gamma^2}{\alpha^2-\beta^2}-\gamma^2, \text{ und}$$

$$\gamma^2=\frac{\alpha^4\gamma^2}{(\alpha^2-\beta^2)^2}-\frac{\alpha^2\gamma^2}{\alpha^2-\beta^2}-x^2 \text{ oder}$$

$$\gamma^2=\frac{\alpha^4\gamma^2-\alpha^2\gamma^2(\alpha^2-\beta^2)}{(\alpha^2-\beta^2)^2}-x^2$$

$$=\frac{\alpha^4\gamma^2-\alpha^4\gamma^2+\alpha^2\gamma^2\beta^2}{(\alpha^2-\beta^2)^2}-x^2$$

$$=\frac{\alpha^2\gamma^2\beta^2}{(\alpha^2-\beta^2)^2}-x^2$$

Es ist also hier

$$\tfrac{1}{4}\delta^2=\frac{\alpha^2\gamma^2\beta^2}{(\alpha^2-\beta^2)^2} \text{ und daher}$$

$$\tfrac{1}{2}\delta=\frac{\alpha\gamma\beta}{\alpha^2-\beta^2} \text{ oder der Halbmesser}$$

des verlangten Kreises.

Um nun den Mittelpunkt dieses Kreises zu finden welcher in der geraden Linie ab liegen muß, s sieht man leicht, daß es nur nöthig ist, von ad = die Größe $\frac{a^2\gamma}{\alpha^2-\beta}$ zu subtrahiren. Zu dem Ende neh me man ae = $\frac{a^2\gamma}{\alpha^2-\beta^2}$, so hat man ed = ad — ae

= u — $\frac{a^2\gamma}{\alpha^2-\beta^2}$ = x, mithin ist e der Mittel punkt des Kreises. Beschreibet man also mit dem Halbmesser $\frac{a\beta\gamma}{\alpha^2-\beta^2}$ einen Kreis, so hat ein jeder Punkt desselben wie c die verlangte Eigenschaft; folglich ist der Kreis der geometrische Ort.

§. 149.

Zusatz.

Weil y = o wird, wenn x oder ed = $\frac{1}{2}\delta$ wird, so läßt sich auch der Mittelpunkt des Kreises finden, wenn in der Gleichung

$$u^2 - \frac{2a^2\gamma}{\alpha^2-\beta^2}.u = -\frac{a^2\gamma^2}{\alpha^2-\beta^2} - y^2$$

die Größe y = o gesetzet, und die beyden Werthe von u gesuchet werden. In dieser Rücksicht erhält man

$$u - \frac{2a^2\gamma}{\alpha^2-\beta^2}.u = -\frac{a^2\gamma^2}{\alpha^2-\beta^2} \text{ und}$$

$$u^2 - \frac{2a^2\gamma}{\alpha^2-\beta^2}u + \frac{a^4\gamma^2}{(\alpha^2-\beta^2)^2} = + \frac{a^4\gamma^2}{(\alpha^2-\beta^2)^2} -$$

$\frac{a^2\gamma^2}{\alpha^2-\beta^2}$ oder

$u^2 -$

$u^2 - \frac{2a^2\gamma}{a^2-\beta^2} + \frac{a^4\gamma}{(a^2-\beta^2)^2} = \frac{a^2\gamma^2\beta^2}{(a^2-\beta^2)^2}$, und

$u - \frac{a^2\gamma}{a^2-\beta^2} = \pm \frac{a\gamma\beta}{a^2-\beta^2}$ und

$u = \pm \frac{a\gamma\beta}{a^2-\beta^2} + \frac{a^2\gamma}{a^2-\beta^2}$ oder

$u = \frac{a\gamma \pm a\gamma\beta}{a^2-\beta}$ oder

$u = \frac{a\gamma(a \pm \beta)}{a^2-\beta^2} = \frac{a\gamma(a \pm \beta)}{(a+\beta)(a-\beta)}$

und die beyden Werthe von u sind

$u = \frac{a\gamma(a+\beta)}{(a+\beta)(a-\beta)} = \frac{a\gamma}{a-\beta} = ag$ und

$u = \frac{a\gamma(a-\beta)}{(a+\beta)(a-\beta)} = \frac{a\gamma}{a+\beta} = af$

die erste Gleichung giebt folgende Proportion

$a-\beta : a = \gamma : ag$, und die zweyte

$a+\beta : a = \gamma : af$.

Nun ist $fg = ag - af$, folglich $\frac{1}{2}fg = fe$.

§. 150.

Aufgabe.

Es ist die Seitenlinie ab (Fig. 38.) des Dreyecks adbgegeben, man sucht den Winkel d, welcher einem gegebenen Winkel gleich ist.

Auflösung.

Es sey $ab = a$, de senkrecht auf ab, $ae = z$ und $ed = t$, so ist $eb = ab - ae = a - z$. Ferner

ner setze man den Halbmesser der Tafeln = ϱ un
die Tangente desjenigen Winkels in den Tafel
welcher dem Winkel d gleich seyn soll, = β. I
den beyden rechtwinklichten Dreyecken ade und de
hat man nun

$$ad : ae = \varrho : \text{sin. ade}$$
$$ad : de = \varrho : \text{cosin. ade}$$
$$db : eb = \varrho : \text{sin. edb}$$
$$db : ed = \varrho : \text{cosin. edb}$$ mithin

$$\text{sin. ade} = \frac{\varrho \cdot ae}{ad}$$

$$\text{cosin. ade} = \frac{\varrho \cdot de}{ad}$$

$$\text{sin. edb} = \frac{\varrho \cdot eb}{db}$$

$$\text{cosin. edb} = \frac{\varrho \cdot ed}{db}$$

Es ist aber $d = ade + edb$, mithin auch

$$\text{sin. } d = \text{sin. } (ade + edb) \text{ und}$$
$$\text{cosin. } d = \text{cos. } (ade + edb);$$
$$\text{sin. } d = \frac{\text{sin. ade. cos. edb} + \text{sin. edb. cos. ad}}{\varrho}$$

oder

$$\text{sin. } d = \frac{\varrho \text{ ae. ed} + \varrho \text{. eb. ed}}{ad. db} \text{ oder}$$

$$\text{sin. } d = \frac{\varrho (ae + eb) ed}{ad. db}$$

$$\text{cos. } d = \frac{\text{cos. ade. cos. edb} - \text{sin. ade. sin. ed}}{\varrho}$$

oder

cos.

$$\text{cos. } d = \frac{\varrho de^2 - \varrho . ae . eb}{ad . db}.$$

Weiter ist $\text{tang. } d = \frac{\varrho . \text{sin. } d}{\text{cos. } d}$

demnach wird

$$\text{tang. } d = \frac{\varrho (ae + eb) ed}{de^2 - ae . eb} \text{ oder}$$

$$\beta = \frac{\varrho . \alpha . t}{t^2 - z(\alpha - z)} \text{ oder}$$

$$\beta = \frac{\varrho \alpha t}{t^2 - \alpha z + z^2} \text{ oder}$$

$$\beta t^2 - \alpha\beta z + \beta z^2 - \varrho \alpha t = o;$$

diese gefundene Gleichung gehöret offenbar zum Kreise. Man erhält daraus

$$t^2 - \alpha z + z^2 - \frac{\varrho \alpha}{\beta} t = o \text{ oder}$$

$$t^2 - \frac{\varrho \alpha}{\beta} . t - \alpha z + z^2 = o.$$

Nun setze man $-\frac{\varrho \alpha}{2\beta} = y$, so hat man

$$t^2 - \frac{\varrho \alpha}{\beta} . t + \frac{\varrho^2 \alpha^2}{4\beta^2} = y^2 \text{ und}$$

$$t^2 - \frac{\varrho \alpha}{\beta} . t = y^2 - \frac{\varrho^2 \alpha^2}{4\beta}; \text{ demnach}$$

$$y^2 - \frac{\varrho^2 \alpha^2}{4\beta^2} - \alpha z + z^2 = o.$$

Ferner sey $z - \frac{1}{2}\alpha = x$, also

$$z^2 - \alpha z + \tfrac{1}{4}\alpha^2 = x^2 \text{ und}$$

$$z^2 - \alpha z = x^2 - \tfrac{1}{4}\alpha^2; \text{ daraus ergiebt sich}$$

$$y^2 - \frac{\varsigma^2\alpha^2}{4\beta^2} + x^2 - \tfrac{1}{4}\alpha^2 = 0, \text{ oder}$$

$$y^2 = \frac{\varsigma^2\alpha^2}{4\beta^2} + \frac{\alpha^2}{4} - x^2$$

Die Gleichung für die Kreislinie, wenn der Hal
messer $= r$ gesetzet wird, ist $y^2 = r^2 - x^2$, mith
ist hier

$$r^2 = \frac{\varsigma^2\alpha^2}{4\beta^2} + \frac{\alpha^2}{4} \text{ und}$$

$$r = \sqrt{\left(\frac{\varsigma^2\alpha^2}{4\beta^2} + \frac{\alpha^2}{4}\right)}.$$

Um also die Lage dieses Halbmessers und den Mi
telpunkt des Kreises zu bestimmen, müssen die be
den Hülfsgleichungen

$$t - \frac{\varsigma\alpha}{2\beta} = y \text{ und}$$

$$z - \tfrac{1}{2}\alpha = x \text{ konstruiret werden.}$$

Zu dem Ende setze man in a die Linie $ag = \frac{\varsigma}{2}$

senkrecht auf ab, und ziehe durch g die Linie g
mit ab parallel, so wird $hd = de - he = de - a$
$= t - \frac{\varsigma\alpha}{2\beta} = y$; ferner nehme man $af = \frac{1}{2}ab =$
$\frac{1}{2}\alpha$, so ist $fe = ae - af = z - \frac{1}{2}\alpha$; man errich
also aus f die Linie fc senkrecht auf ab, so wir
$ch = fe = z - \frac{1}{2}\alpha = x$ und c der Mittelpunkt de
Kreises seyn. Zieht man ac, so ist in dem rechtwink
lichten Dreyecke acf

$$ac^2 = af^2 + fc^2 = af^2 + ag^2 \text{ oder}$$

$$ac^2 = \frac{\alpha^2}{4} + \frac{\varsigma^2\alpha^2}{4\beta^2} \text{ und}$$

ac-

$$ac = \sqrt{\left(\frac{a^2}{4} + \frac{\varrho^2 a^2}{4\beta^2}\right)};$$

Beschreibet man also mit dem Halbmesser ac einen Kreis, so hat ein jeder Punkt desselben die verlangte Eigenschaft; mithin ist der Kreis der geometrische Ort, welcher in allen Punkten der Aufgabe ein Genüge leistet.

§. 151.

Zusatz.

In dem rechtwinklichten Dreyecke acg ist

$ag : gc = \varrho :$ tang. cag oder

$cf : af = \varrho :$ tang. cag oder

$cf : \frac{1}{2}a = \varrho :$ tang. cag.

Ist nun der Winkel cag = dem gegebenen Winkel so wird tang. cag $= \beta$, und

$cf : \frac{1}{2}a = \varrho : \beta$, folglich

$$cf = \frac{a\varrho}{2\beta};$$

Verzeichnet man also an ab in a einen Winkel caf, welcher das Complement des gegebenen Winkels zu 90° ist, und setzt in der Mitte f der Linie ab die senkrechte Linie cf auf, so wird der Mittelpunkt c des Kreises sogleich erhalten.

§. 152.

Aufgabe.

Einen gegebenen Winkel oder Kreisbogen in drey gleiche Theile zu theilen.

Auflösung.

Es sey der gegebene Winkel bca (Fig. 39.) od
der Bogen ba. Man setze nun den zu suchende
dritten Theil ea, ziehe bd und eg senkrecht auf de
Halbmesser ca, so ist bd der Sinus und cd de
Cosinus des gegebenen Bogens ba. Es bedeut
$bd = \alpha$, $cd = \gamma$, $ca = \varrho$, $cg = z$ und $ge = t$
Das rechtwinklichte Dreyeck ceg giebt

$$ce^2 = cg^2 + ge^2 \text{ oder}$$
$$\varrho^2 = t^2 + z^2, \text{ mithin}$$
$$t^2 = \varrho^2 - z^2.$$

Ferner sind die beyden Dreyecke cdf und cge ein
ander ähnlich; demnach

$$cg : cd = ge : df \text{ oder}$$
$$z : \gamma = t : df \text{ und } df = \frac{\gamma t}{z}.$$

Man verlängere eg bis h, so ist $eh = 2eg = be$
mithin auch der Winkel $bec = ceg = cfd = bfe$
und bfe ein gleichschenklichtes Dreyeck, daher $bf =$
$be = eh = 2eg$. Weil nun $bd = bf + fd$, so i
auch $bd = 2eg + fd$, oder

$$\alpha = 2t + \frac{\gamma t}{z} \text{ und}$$
$$z\alpha = 2tz + \gamma t \text{ und}$$
$$(\alpha - 2t)\, z = \gamma t \text{ oder}$$
$$(\tfrac{1}{2}\alpha - t)\, z = \tfrac{1}{2}\gamma t;$$

diese letzte Gleichung gehöret zur Hyperbel zwischen
ihren Asymptoten (§. 134.). Man setze nun $\frac{1}{2}\alpha -$
$t = y$, mithin

$$\tfrac{1}{2}\alpha - y = t, \text{ und}$$
$$yz = \tfrac{1}{2}\gamma(\tfrac{1}{2}\alpha - y) \text{ oder}$$
$$yz = \tfrac{1}{4}\gamma\alpha - \tfrac{1}{2}\gamma y$$

$$yz + \tfrac{1}{2}\gamma y = \tfrac{1}{4}\gamma a$$
$$(z + \tfrac{1}{2}\gamma)y = \tfrac{1}{4}\gamma a.$$

Ferner sey $z + \frac{1}{2}\gamma = x$, so wird

$$xy = \tfrac{1}{4}a\gamma$$

es ist also die Potenz der Hyperbel $= \frac{1}{4}a\gamma$. Um nun selbige zu konstruiren dienen die Hülfsgleichungen

$$\tfrac{1}{2}a - t = y \text{ und}$$
$$z + \tfrac{1}{2}\gamma = x.$$

Man nehme demnach $ci = \frac{1}{2}db = \frac{1}{2}a$ auf ca senkrecht, und ziehe durch i die Linie il mit ca parallel, verlängere ge bis l, so hat man $el = lg - ge = ic - ge = \frac{1}{2}a - t = y$. Ferner nehme man $cm = \frac{1}{2}cd = \frac{1}{2}\gamma$, und ziehe durch m die Linie on mit db parallel, so ist $mg = mc + cg = oi + il = \frac{1}{2}\gamma + z = x$; demnach sind on und ol die beyden Asymptoten und o ist der Mittelpunkt der Hyperbel. Zu dieser Hyperbel gehöret der Punkt c, weil $xy = \frac{1}{4}a\gamma = \frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{2}\gamma = cm$. $ci = oi$. ꝛc. Aus der Lage der Asymptoten und aus dem Punkte c läßt sich nun sehr leicht die Hyperbel nach dem §. 443 zeichnen. Diese Hyperbel wird durch den verlangten Punkt e gehen, und den Bogen $ea = \frac{1}{3}ba$ bestimmen.

Es ist hier angenommen worden, daß der gegebene Kreisbogen oder der Winkel kleiner als 90° ist; wäre nun selbiger größer als 90°, so ist der Cosinus desselben negativ, nnd man muß in den vorigen Gleichungen $-\gamma$ statt $+\gamma$ setzen. Fiel die Größe des gegebenen Bogens zwischen zwey und drey Quadranten, so wird nun auch der Sinus negativ, und es muß allenthalben $-a$ und $-\gamma$ stat $+a$ und $+\gamma$ gesetzet werden.

§. 153.

§. 153.

Zusatz.

Man nehme $mp = n.c = \frac{1}{2}cd$ und ziehe p mit mr parallel, so wird $pq = db$ seyn, weil $cd = cp$ ist, demnach ist pq der Sinus und pc der Cosinus des Bogens uqb oder des Winkels ucb welcher sich mit dem gegebenen bca zu 180° ergänzet; beschreibet man also zwischen den Asymptoten or und ow und durch den Punkt q die Hyperbel sq, so bestimmt der Durchschnittspunkt s der Hyperbel mit der Peripherie des Kreises den Bogen us, welcher der dritte Theil von dem Bogen uq ist, welcher sich mit dem gegebenen ba zu 180° ergänzet. Denn es ist hier $xy = -\frac{1}{4}\alpha.\gamma$.

Man nehme den Bogen abuB um 180° größer als den gegebenen Bogen ab oder welcher einerley ist, man nehme $uB = ab$, so ist nun der Sinus dieses Bogens $pB = bd$ und der Cosinus desselben $= cp = cd$, nur sind beyde negativ, also wird $xy = \frac{1}{4}(-\alpha x - \gamma) = \frac{1}{4}\alpha\gamma$, welches die Hyperbel des vorigen § war; demnach bestimmt auch der Punkt A den Bogen uA als den dritten Theil des Bogens abuA, welcher um 180° größer als der gegebene ab ist. Hieraus folgt unläugbar, daß eine einzige Construktion, welche den dritten Theil eines gegebenen Bogens ω bestimmt, zugleich die dritten Theile der Bogen $180° - \omega$ und $180° + \omega$ bestimmt.

§. 154.

Zusatz.

Aus der Gleichung

$a = 2t + \frac{\gamma t}{z}$ erhält man

$az = (2z + \gamma)t$ und

$t = \frac{az}{2z+\gamma}$, und

$t^2 = \frac{a^2z^2}{4z^2 + 4z\gamma + \gamma^2}$;

diesen Werth von t^2 setze man in die Gleichung

$\varrho^2 = t^2 + z^2$, so ergiebt sich

$\varrho^2 = \frac{a^2z^2}{4z^2 + 4z\gamma + \gamma^2} + z^2$; also

$\varrho^2z^2 + 4\varrho^2z\gamma + \varrho^2\gamma^2 = a^2z^2 + 4z^4 + 4z^3\gamma + \gamma^2z^2$

oder

$\varrho^2z^2 + 4\varrho^2z\gamma + \varrho^2\gamma^2 = (a^2+\gamma^2)z^2 + 4z^4 + 4z^3\gamma$

aber $a^2 + \gamma^2 = \varrho^2$, mithin

$\varrho^2z^2 + 4\varrho^2z\gamma + \varrho^2\gamma^2 = \varrho^2z^2 + 4z^4 + 4z^3\gamma$ aber

$\varrho^2z^2 + 4\varrho^2z\gamma + \varrho^2\gamma^2 = 4z^4 + 4z^3\gamma$ oder

$\varrho^2z(z+\gamma) + \gamma\varrho^2(z+\gamma) = 4z^3(z+\gamma)$ oder

$\varrho^2z + \gamma\varrho^2 = 4z^3$ oder

$z^3 - 3\varrho^2z - \gamma\varrho^2 = 0$.

Weil diese Gleichung kubisch ist, so muß sie für z drey Werthe geben, und zwar müssen einer positiv und die andern negativ seyn. Es sind auch wirklich diese drey Werthe durch die Construktion gefunden worden, nemlich cg, cr und cv, wo cg positiv und die beyden andern negativ sind. Will man diese drey Werthe nach der Cardanischen Re-

gel

gel auflösen, so wird $z^3 = \frac{3}{4}\varrho^2 z + \frac{1}{4}\gamma\varrho^2$, mith

$$z = \frac{\sqrt[3]{(\gamma\varrho^2 + \sqrt{(-\varrho^6 + \gamma^2\varrho^4)}}}{2} + \frac{\sqrt[3]{(\gamma\varrho^2 - \sqrt{(-\varrho^6 + \gamma^2\varrho}}}{2}$$

Soll aber dieser Werth für z statt finden, so w erfordert, daß

$$\gamma^2\varrho^4 > \varrho^6 \text{ oder}$$
$$\gamma^2 > \varrho^2 \text{ also}$$
$$\gamma > \varrho$$

d. h. es müßte der Cosinus für den Bogen, w cher in drey Theile getheilet werden soll, größer d der Halbmesser des Kreises seyn; welches aber u möglich ist. Hieraus sieht man, daß die Carl nische Regel nur einen einzigen imaginären We für z giebt, da doch z drey reelle nemlich ei positiven und zwey negative Werthe hat. Di drey Werthe sind die Cosinusse der Bogen von $\frac{1}{3}$a von $\frac{1}{3}(180° - ab)$ und von $\frac{1}{3}(180° + ab)$.

Sechstes Kapitel.

Von der Anwendung der Differenzialrec nung in Bestimmung der Tagenten, Su tangenten, Normalen, Subnormalen d algebraischen Linien für rechtwink- lichte Koordinaten.

§. 155.

Aufgabe.

Die Verhältnisse der Ordinate zur Subta gente, Tangente, Subnormale, und Norma zu finden.

Au

Auflösung.

Es sey de (Fig. 40.) für den Punkt d der algebraischen Linie die Tangente, ab die Abscisse und db die dazu gehörige Applikate, mithin eb die Subtangente. Es nehme nun die Abscisse ab um das unbestimmte Stück bc zu, so wird auch die Applikate bd zunehmen. Man ziehe nemlich durch c die Linie ch mit bd, und durch d die Linie dg mit ac parabel, so ist gh der Zuwachs der Applikate bd. Setzt man also ab = x, bd = y, so ist bc = dg = Δx und gh = Δy. Durch die beyden Punkte h und d ziehe man die Linie hf bis sie die Abscissenlinie fi in f schneide, so erhält man die beyden ähnlichen Dreyecke hdg und dfb und man hat

$$hg : dg = db : bf \text{ oder}$$

$$\Delta y : \Delta x = y : bf, \text{ mithin}$$

$$bf = y\frac{\Delta x}{\Delta y};$$

jemehr nun bc mithin auch gh oder Δx und Δy abnimmt, desto mehr nähert sich der Werth von bf dem von be; werden Δx und Δy unendlich klein, so hat auch bf die Gränze be erreichet, und es ist nach Gründen der Differenzialrechnung

$$be = y.\frac{dx}{dy} \text{ oder}$$

$$\text{Subtangente} = y.\frac{dx}{dy}.$$

Weil ferner das Dreyeck edb rechtwinklicht ist, mithin auch

$$de = \sqrt{(eb^2 + db^2)} \text{ oder}$$

$$de = \sqrt{(y^2 + y^2\frac{dx^2}{dy^2})}$$

= r

$= y\sqrt{\left(\frac{dx^2}{dy^2} + 1\right)}$, so hat man

$$\text{Tangente} = y\sqrt{\left(1 + \frac{dx^2}{dy^2}\right)}.$$

Auf ed ziehe man di senkrecht, so ist di die Normale und bi die Subnormale. Nun hat man

$$eb : bd = bd : bi \text{ oder}$$

$$y\frac{dx}{dy} : y = y : bi \text{ und}$$

$$bi = y : \frac{dy}{dx} = y.\frac{dx}{dy}, \text{ also}$$

$$\text{Subnormale} = y.\frac{dy}{dx}.$$

Endlich ist im rechtwinklichten Dreyecke dbi

$$di = \sqrt{(bi^2 + bd^2)} \text{ oder}$$

$$di = \sqrt{\left(y^2.\frac{dy^2}{dx^2} + y^2\right)}$$

oder $di = y\sqrt{\left(\frac{dy^2}{dx^2} + 1\right)}$, folglich

$$\text{Subnormale} = y\sqrt{\left(\frac{dy^2}{dx^2} + 1\right)}.$$

§. 156.

Aufgabe.

Es ist die Gleichung für die Kreislinie gegeben, man soll die Subtangente, Tangente, Normale, und Subnormale für einen jeden Punkt derselben finden.

Auflösung.

Man differenzire die gegebene Gleichung, und suche die Werthe von $\frac{dx}{dy}$, $\frac{dx^2}{dy^2}$ und $\frac{dy^2}{dx^2}$; hierauf setze man selbige in diese Formeln

$$\text{Subtangente} = y \cdot \frac{dx}{dy}$$

$$\text{Tangente} = y \sqrt{\left(\frac{dx^2}{dy^2} + 1\right)}$$

$$\text{Subnormale} = y \cdot \frac{dy}{dx} \text{ und}$$

$$\text{Normale} = y \sqrt{\left(\frac{dy^2}{dx^2} + 1\right)}$$

so wird man die verlangten Größen in Funktionen von x und y gefunden haben. Will man lauter Funktionen von x haben, so muß man aus der gegebenen Gleichung den Werth von y suchen, und selbige in obige Funktionen substituiren; will man aber Funktionen von y haben, so muß man aus der Gleichung den Werth von x suchen, und selbigen in die gefundenen Funktionen setzen. Bedeutet r den Halbmesser des Kreises, so ist

$y^2 = 2rx - x^2$ folglich

$2ydy = 2rdx - 2xdx$ oder

$ydy = (r-x)\,dx$ und

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y}{r-x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{r-x}{y}$$

$$\frac{dx^2}{dy^2} = \frac{y^2}{(r-x)^2}$$

$$\frac{dy^2}{dx^2} = \frac{(r-x)^2}{y^2}; \text{ mithin}$$

$$\text{Subtangente} = \frac{y^2}{r-x}$$

$$\text{Tangente} = y\sqrt{\left(\frac{y^2}{(r-x)^2}+1\right)}$$

$$= \frac{y}{r-x}\sqrt{(y^2+(r-x)^2)}$$

$$\text{Subnormale} = r-x$$

$$\text{Normale} = y\sqrt{\left(\frac{(r-x)^2}{y^2}+1\right)}.$$

$$= \sqrt{((r-x)^2+y^2)}.$$

Will man lauter Funktionen von x haben, so wi

$$\text{Subtangente} = \frac{2rx-x^2}{r-x}$$

$$= \frac{(2r-x)x}{r-x}.$$

$$\text{Tangente} = \frac{\sqrt{(2rx-x^2)}\sqrt{(2rx-x^2+r^2-2rx+x}}{r-x}$$

$$= \frac{\sqrt{(2rx-x^2)}}{r-x}\sqrt{r^2}$$

$$= \frac{r\sqrt{(2rx-x^2)}}{r-x}$$

$$\text{Subnormale} = r-x$$

$$\text{Normale} = \sqrt{(r^2-2rx+x^2+2rx-x^2)}$$

$$= \sqrt{r^2} = r.$$

§. 157.

Zusatz.

Bey dem Kreise verhält sich also

1. die Entfernung der Abscisse vom Mittelpunkte zu der Abscisse wie die andere Abscisse zur Subtangente.

2. Verhält sich diese Entfernung zu der Applikate, wie der Halbmesser zur Tangente.

3. Die Subnormallinie endiget sich allemal in dem Mittelpunkte des Kreises, und

4. die Normallinie ist dem Halbmesser des Kreises gleich.

§. 158.

Zusatz.

Die Gleichung $y^m = a^n x^{m-n} - x^m$ für die Familie der Kreise giebt

$my^{m-1} dy = ((m-n)a^n x^{m-n-1} - mx^{m-1}) dx$, also

$\frac{dx}{dy} = \frac{my^{m-1}}{(m-n)a^n x^{m-n-1} - mx^{m-1}}$ und

$\frac{dy}{dx} = \frac{(m-n)a^n x^{m-n-1} - mx^{m-1}}{my^{m-1}}$, folgl.

$y\frac{dx}{dy} = \frac{my^m}{(m-n)a^n x^{m-n-1} - mx^{m-1}}$ oder

$y\frac{dx}{dy} = \frac{m(a^n x^{m-n} - x^m)}{(m-n)a^n x^{m-n-1} - mx^{m-1}}$.

In dem gemeinen Kreise ist $m = 2$ und $n =$ also

$$y, \frac{dx}{dy} = \frac{2(ax - x^2)}{a - 2x}$$

$$= \frac{ax - x^2}{\frac{1}{2}a - x} \text{ wie vorhin.}$$

§. 159.

Aufgabe.

Es ist die Gleichung für die Parabel gege ben, man soll die Subtangente, Tangente, Sub normale und Normale für einen jeden gegebenen Punkt finden.

Auflösung.

Es sey der Parameter $= a$, so ist

$y^2 = ax$, mithin

$2ydy = adx$ und

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2y}{a}$$

$$\frac{dx^2}{dy^2} = \frac{4y^2}{a^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{2y} \text{ und}$$

$$\frac{dy^2}{dx^2} = \frac{a^2}{4y^2}; \text{ mithin}$$

$$\text{Subtangente} = y.\frac{2y}{a} = \frac{2y^2}{a}$$

Tangente $= y\sqrt{(1+\frac{4y^2}{a^2})}$

$= \frac{y}{a}\sqrt{(a^2+4y^2)}$

Subnormale $= y.\frac{a}{2y} = \frac{1}{2}a$

Normallinie $= y\sqrt{(1+\frac{a^2}{4y^2})}$

$= \frac{1}{2}\sqrt{(4y^2+a^2)}$.

Wenn man Funktionen von x haben will, so muß man statt y den Werth $\sqrt{ax}$ und statt y^2 den Werth ax setzen, und man erhält

Subtangente $= \frac{2ax}{a} = 2x$

Tangente $= \frac{\sqrt{ax}}{a}\sqrt{(a^2+4ax)}$

$= \sqrt{(\frac{a^3x+4a^2x^2}{a^2})}$

$= \sqrt{(ax+4x^2)}$

Subnormale $= \frac{1}{2}a$

Normale $= \frac{1}{2}\sqrt{(4ax+a^2)}$.

§. 160.

Zusatz.

Es ist demnach in der Parabel

1. die Subtangente der doppelten Abscisse gleich wie auch oben schon ist bewiesen worden (§. 85.).
2. Die Subnormale ist dem halben Parameter gleich, folglich eine beständige Größe.

§. 161.

Zusatz.

Die Gleichung für die Parabeln aller Gattungen

$y = \alpha^{m-n} x^n$ giebt

$my^{m-1} dy = n\alpha^{m-n} x^{n-1} dx$, folglich

$$\frac{dx}{dy} = \frac{my^{m-1}}{n\alpha^{m-n} x^{n-1}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{n\alpha^{m-n} x^{n-1}}{my^{m-1}}, \text{ mithin}$$

$$\text{Subtangente} = \frac{my^m}{n\alpha^{m-n} x^{n-1}}$$

$$= \frac{m\alpha^{m-n} x^n}{n\alpha^{m-n} x^{n-1}}$$

$$= \frac{m}{n} \cdot x.$$

§. 162.

Aufgabe.

Es ist die Gleichung für die Ellipse und Hyperbel gegeben man soll die Subtangente, Tangente, Subnormale und Normale finden.

Auflösung.

Aus der gegebenen Gleichung

$px \pm \frac{px^2}{\alpha} = y^2$ erhält man

$2ydy = pdx \pm \frac{2p}{\alpha} \cdot xdx$, folglich

$dx =$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2y}{p \pm \frac{2p}{a} \cdot x}$$

$$= \frac{2ay}{ap \pm 2px}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ap \pm 2px}{2ay}$$

$$\frac{dx^2}{dy^2} = \frac{4a^2y^2}{(ap \pm 2px)^2}$$

$$\frac{dy^2}{dx^2} = \frac{(ap \pm 2px)^2}{4a^2y^2}$$; daher

$$y \cdot \frac{dx}{dy} = \frac{2ay^2}{ap \pm 2px}$$

$$y \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{ap \pm 2px}{2a}$$

Will man die Subtangente in einer Funktion von x haben, so setze man statt ay^2 den gleichen Werth $apx \pm px^2$ und man hat

$$y \cdot \frac{dx}{dy} = \frac{2(apx \pm px^2)}{ap \pm 2px}$$

$$= \frac{x(a \pm x)}{\frac{1}{2}a \pm x}.$$

§. 163.

Zusatz.

Wenn über ein und der nemlichen großen Axe mehrere Ellipsen und Hyperbeln sind beschrieben worden, so haben diese für einerley Abscisse auch

einerley Subtangente, weil es nach dem Ausdruc des vorigen §. auf die Größe des Parameters ga nicht ankömmt. Hieraus folgt, daß alle Tangen ten, welche zur nemlichen Abscisse der verschiede nen Ellipsen oder Hyperbeln gehören, in einerle Punkt der Axe zusammenkommen müssen.

§. 164.

Zusatz.

Die Gleichung für die Ellipsen und Hyperbeln aller Gattungen

$$y^m = p^n x^{m-n} \pm \frac{p}{\alpha} x^m \quad \text{giebt}$$

$$my^{m-1}dy = ((m-n)p^n x^{m-n-1} \pm m\frac{p}{\alpha} x^{m-1})dx$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{my^{m-1}}{(m-n)p^n x^{m-n-1} \pm \frac{mp}{\alpha} x^{m-1}}$$

$$= \frac{m\alpha y^{m-1}}{(m-n)\alpha p^n x^{m-n-1} \pm mpx^{m-1}}, \text{ daher}$$

$$y.\frac{dx}{dy} = \frac{m\alpha y^m}{(m-n)\alpha p^n x^{m-n-1} \pm mpx^{m-1}}$$

$$= \frac{m\alpha p^n x^{m-n} \pm mpx^m}{(m-n)\alpha p^n x^{m-n-1} \pm mpx^{m-1}}.$$

§. 165.

Zusatz.

Aus der Gleichung für die gleichseitige Hyperbel zwischen ihren Asymptoten

$xy = a^2$ erhält man

$xdy + ydx = o$

und $ydx = -xdy$, folglich

$\frac{dx}{dy} = -\frac{x}{y}$ und

$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$; daraus ergiebt sich

$y.\frac{dx}{dy} = -x$ und

$y.\frac{dy}{dx} = -\frac{y^2}{x}$.

Hieraus sieht man, daß die Subtangente und Subnormale auf der Seite lieget, welche der Abscisse entgegengesetzet ist.

§. 166.

Aufgabe.

Es ist die Gleichung der Zissoide gegeben, man soll für einen jeden Punkt die Subtangente und Subnormale finden.

Auflösung.

Aus der gegebenen Gleichung der Zissoide

$y^2 = \frac{x^3}{2a-x}$ erhält man

$2ay^2 - xy^2 = x^3$ und

$4\alpha ydy - 2xydy - y^2dx = 3x^2dx$ oder
$(4\alpha y - 2xy)\,dy = (3x^2 + y^2)\,dx$ und

$$\frac{dx}{dy} = \frac{4\alpha y - 2xy}{3x^2 + y^2}$$

$$= \frac{2y(2\alpha - x)}{3x^2 + y^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + y^2}{2y(2\alpha - x)}\text{; daher}$$

$$y.\frac{dx}{dy} = \frac{2y^2(2\alpha - x)}{3x^2 + y^2} \text{ und}$$

$$y.\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + y^2}{2(2\alpha - x)}.$$

Will man Funktionen von x haben, so setze man statt y^2 den gleichen Werth, so ergiebt sich

$$y.\frac{dx}{dy} = \frac{2x^3}{\frac{2\alpha \cdot x}{3x^2 + \frac{x^3}{2\alpha - x}}}(2\alpha - x)$$

$$= \frac{2x}{3 + \frac{x}{2\alpha - x}}$$

$$= \frac{2x(2\alpha - x)}{3(2\alpha - x) + x}$$

$$= \frac{2x(2\alpha - x)}{6\alpha - 2x}$$

$$= \frac{x(2\alpha - x)}{3\alpha - x} \text{ und}$$

$$y.\frac{dy}{dx} = 3x^2 + \frac{x^3}{2a-x}$$

$$= \frac{3x^2(2a-x)+x^3}{2(2a-x)}$$

$$= \frac{2(2a-x)^2}{6ax^2-2x^3}$$

$$= \frac{2(2a-x)^2}{(3a-2x)x^2}$$

$$= \frac{(2a-x)^2}{}$$

§. 167.

Aufgabe.

Es ist die Gleichung der Konchoide gegeben, man soll die Subtangente und Subnormale für einen Punkt derselben finden.

Auflösung.

Die Gleichung der Konchoide

$$y^2 = \frac{(\beta \pm x)^2 (a^2-x^2)}{x} \text{ giebt}$$

$$y = \frac{(\beta \pm x)\sqrt{(a^2-x^2)}}{x}$$

$$= x^{-1}(\beta \pm x)(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}, \text{ folglich}$$

$$dy = -(\beta \pm x)(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}x^{-2}dx \pm x^{-1}(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}dx$$

$$= -(\beta \pm x)(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}dx, \text{ folglich}$$

$$\frac{dy}{dx} =$$

$$-(\beta \pm x)(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}} x^{-2} \pm x^{-1}(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}} -$$
$$(\beta \pm x)(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

und $\frac{dx}{dy} =$

$$\frac{1}{-(\beta \pm x)(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}} x^{-2} + x^{-1}(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}} -}{(\beta \pm x)(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}}$$

Demnach wird $y.\frac{dx}{dy} =$

$$\frac{x^{-1})\beta \pm x)(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}{-(\beta \pm x)(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}} x^{-2} \pm x^{-1}(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}} -}{(\beta \pm x)(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}}$$

Multipliciret man Zähler und Nenner mit $x^2(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}$, so hat man

$$y.\frac{dx}{dy} =$$

$$\frac{x(\beta \pm x)(a^2-x^2)}{-(\beta \pm x)(a^2-x^2) \pm x(a^2-x^2) - x^2(\beta \pm x)}$$

und wenn der Nenner gehörig entwickelt wird

$$y.\frac{dx}{dy} = \frac{x(\beta \pm x)(a^2-x^2)}{-\beta a^2 \mp x^3}$$; ferner ist

$$y\frac{dy}{dx} =$$

$$-(\beta \pm x)^2(a^2-x^2)x^{-3} \pm x^{-2}(\beta \pm x)(a^2-x^2) -$$
$$x^{-1}(\beta \pm x)^2$$

oder

$$y.\frac{dy}{dx} = -\frac{(\beta \pm x)^2(a^2-x^2)}{x^2} \pm \frac{(\beta \pm x)(a^2-x^2)}{x^2} - \frac{(\beta \pm x)^2}{x}$$

$$= \frac{\beta \pm x}{x}\left(\frac{-(\beta \pm x)(a^2-x^2)}{x} \pm \frac{a^2-x^2}{x} - \frac{\beta \pm x}{1}\right)$$

$$= \frac{\beta \pm x}{x}\left(\frac{-(\beta \pm x)(a^2-x^2) \pm (a^2-x^2)x}{x^2} - \frac{(\beta \pm x)x^2}{x^2}\right)$$

$$= \frac{\beta \pm x}{x}\left(\frac{-a^2\beta \mp x^2}{x^2}\right)$$

§. 168.

Lehrsatz.

Man kann die Asymptote einer algebraischen krummen Linie als eine Tangente an einem unendlich entfernten Punkte derselben betrachten.

Beweis.

Eine gerade Linie, welche mit einem Theile einer krummen Linie einen Punkt gemein hat, dieser Theil der krummen Linie aber um diesen gemeinschaftlichen Punkt herum ganz auf der einen Seite der geraden Linie lieget, ist die Tangente dieses Theils. Weil nun die Asymptote einer krum-

krummen Linie dieselbe nicht schneidet, so muß d krumme Linie ganz auf der einen Seite der Asym tote liegen. Es nähern sich aber die Punkte d krummen Linie der Asymptote unendlich d. h. ma kann einen unendlichen Punkt der Linie annehme als wäre er in der Asymptote; mithin ist diese d Tangente an jenem Punkte.

§. 169.

Aufgabe.

Die Lage der Asymptote einer krummen Lini zu finden.

Auflösung.

Weil die Asymptote die krumme Linie i einem unendlichen Punkte berühret, so muß w nigstens eine von den beyden Coordinaten unendlic klein werden; es können beyde unendlich seyn, vie leicht kann auch eine endlich bleiben, oder unend lich werden, wie bey der Conchoide. Diejenige welche undendlich wird, nehme man für die Ab scisse an, sind beyde unendlich, so kann man ein von den Coordinaten zur Abscisse annehmen, welch man will. Es sey nun ad (Fig. 41.) die krumm Linie, wozu die Asymptote cd gehöret, so ist de Punkt d unendlich weit entfernet, mithin nicht al lein die Abscisse ab, sondern auch die Ordinate bd unendlich. Hier schneidet zwar die Asymptote di Abscissenlinie cb, es kann aber auch jene mit diese parallel seyn. Aus dem Anfangspunkte der Ab scissenlinie a ziehe man ae senkrecht auf cb, so ist der Punkt a von d unendlich entfernet, weil ca

end

endlich ist. Nun hat man $ca = cb - ab =$ dem Unterschiede einer unendlichen Subtangente und einer unendlichen Abscisse. Weil aber diese Differenz keinen verständlichen Werth geben kann, so muß man x als ein unbestimmtes endliches annehmen, und in dieser Rücksicht ea suchen; man erhält $ca = cb - ab = y.\frac{dx}{dy} - x$; ferner hat man

$cb : bd = ca : ae$ oder

$y.\frac{dx}{dy} : y = y.\frac{dy}{dy} - x : ae$ oder

$\frac{dx}{dy} : 1 = y.\frac{dx}{dy} - x : ae$ und daher

$$ae = \left(y.\frac{dx}{dy} - x\right) : \frac{dx}{dy}$$

$$= y - \frac{x dy}{dx}.$$

Die Werthe von $\frac{dx}{dy}$ und $\frac{dy}{dx}$ werden durch endliche Größen ausgedruckt, und in diesen endlichen Ausdruckungen wird x unendlich angenommen. Sollte alsdenn der Werth hiervon selbst unendlich werden, so ist dies eine Anzeige, daß die Asymptote mit der Abscissenlinie parallel ist.

Exempel. Ist ad eine Hyperbel, so ist

$$y.\frac{dx}{dy} = \frac{\alpha x + x^2}{\frac{1}{2}\alpha + x} \text{ und}$$

$$y.\frac{dx}{dy} - x = \frac{\alpha x + x^2}{\frac{1}{2}\alpha + x} - x$$

=

$$= \frac{ax + x^2 - \frac{1}{2}ax - x^2}{\frac{1}{2}a + x}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}ax}{\frac{1}{2}a + x}$$

$$= \frac{ax}{a + 2x}.$$

Setzt man nun $x = \infty$, so erhält man

$ac = \frac{a\infty}{a + 2\infty}$, und wenn Zähler und Nenner durch ∞ dividiret werden

$$ac = \frac{a}{\frac{a}{\infty} + 2} = \frac{a}{0 + 2} = \frac{1}{2}a$$

ferner ist $\frac{dy}{dx} = \frac{xp + 2px}{2a\sqrt{(px + \frac{p}{a}x^2)}}$ und

$$\frac{xdy}{dx} = \frac{axp + 2px^2}{2a\sqrt{(px + \frac{p}{a}x^2)}} \text{ und}$$

$$y - \frac{xdy}{dx} = \sqrt{(px + \frac{p}{a}x^2)} - \frac{axp + 2px^2}{2a\sqrt{(px + \frac{p}{a}x^2)}}$$

$$= \frac{2a(px + \frac{p}{a}x^2) - axp - 2px^2}{2a\sqrt{(px + \frac{p}{a}x^2)}}$$

=

$$= \frac{2apx + 2px^2 - apx - 2px^2}{2aV(px + \frac{p}{a}x^2)}$$

$$= \frac{apx}{2aV(px + \frac{p}{a}x^2)}$$

$$= \frac{px}{2V(px + \frac{p}{a}x^2)}$$

$$= \frac{pxVa}{2V(apx + px^2)}$$

$$= \frac{xVpa}{2V(ax + x^2)}.$$

und wenn $x = \infty$

$$ae = \frac{\infty Vpa}{2V\infty^2} = \frac{\infty Vpa}{2\infty} = \frac{1}{2}Vpa,$$

Es ist also ae die halbe mittlere Proportionalgröße zwischen der Hauptaxe a und dem Parameter p, mithin = der halben konjugirten Axe, und c der Mittelpunkt der Hyperbel.

§. 170.

Aufgabe.

Den Winkel finden, welchen eine Tangente einer krummen Linie mit der Applikate oder mit der Axe der Abscisse machet.

Auflösung.

Es sey de (Fig. 40,) die Tangente der krummen Linie ad. Nimmt nun ad um dh zu, so sind beyde Dreyecke dhg und dfb einander ähnlich und man hat

$$hg : db = dg : fb \text{ oder}$$
$$\Delta y : y = \Delta x : bf \text{ oder}$$
$$\Delta y : \Delta x = y : bf;$$

es ist aber auch in dem Dreyecke dfb

$$db : bf = 1 : \text{tang. fdb oder}$$
$$y : bf = 1 : \text{tang. fdb folglich auch}$$
$$\Delta y : \Delta x = 1 : \text{tang. fdb und}$$
$$\text{tang. fdb} = \frac{\Delta x}{\Delta y}.$$

Je näher nun der Punkt h dem Punkte d rückt, desto mehr nähert sich der Werth von bf dem von be, auch der Werth von df der Tangente de; fällt endlich h auf d, so wird auch vollkommen df = de, mithin fdb = edb, und tang. fdb = tang. edb; daher ist

$$\text{tang. edb} = \frac{dx}{dy}.$$

Ferner ist $dg : gh = fb : bd$ und

$$fb : bd = 1 : \text{tang. dfb also auch}$$
$$dg : gh = 1 : \text{tang. dfb und}$$
$$\text{tang. dfb} = \frac{gh}{dg} = \frac{\Delta y}{\Delta x}, \text{ folglich}$$
$$\text{tang. deb} = \frac{dy}{dx}.$$

Exempl. In der Ellipse ist $\frac{dx}{dy} = \frac{2ay}{ap - 2px}$

$$= 2\alpha\sqrt{(px - \frac{p}{\alpha}x^2)}$$

$$\alpha p - 2px$$

$$= 2\sqrt{(px - \frac{p}{\alpha}x^2)}$$

$$p - \frac{2p}{\alpha}x$$

$$= \sqrt{(px - \frac{p}{\alpha}x^2)}$$

$$\tfrac{1}{2}p - \frac{p}{\alpha}x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\tfrac{1}{2}p - \frac{p}{\alpha}x}{\sqrt{(px - \frac{p}{\alpha}x^2)}}$$

Siebentes Kapitel.

Von Erfindung der Tangenten, Subtangenten, Normalen und Subnormalen mit schiefwinklichten Coordinaten durch Hülfe der Differenzialrechnung.

§. 171.

Aufgabe.

Die Subtangente einer algebraischen Linie mit schiefwinklichten Coordinaten zu finden.

Auflösung.

Es, sey de (Fig. 42.) die Tangente für de Punkt d der krummen Linie da, ab = x, bd = bc = Δc und gh = Δy, durch h und d ziehe ma die Linie hf, so erhält man die beyden ähnliche Dreyecke hdg und dfb, und es ist

$$hg : gd = db : bf \text{ oder}$$
$$\Delta y : \Delta x = y : bf \text{ also}$$
$$bf = y.\frac{\Delta x}{\Delta y}.$$

Weil nun die Gränze von bf die Subtangente b und die Gränze von

$$y\frac{\Delta y}{\Delta x} = y\frac{dx}{dy}, \text{ so hat man}$$

$$\text{Subtangente} = y\frac{dx}{dy}$$

wie bey krummen Linien mit rechtwinklichten Coordinaten.

§. 172.

Aufgabe.

Es ist der Coordinatenwinkel ω gegeben, man soll die Winkel μ und λ finden, welche die Tangente mit der Abscissenlinie und der Applikat machen.

Auflösung.

Man lasse aus dem Punkte d die Linie dk senkrecht auf ek herab, so hat man in dem rechtwinklichten Dreyecke bdk

bd:

$bd : bk = 1 : \cos.\omega$ oder
$y : bk = 1 : \cos.\omega$ mithin
$bk = y . \cos.\omega$.
Ferner ist $bd : dk = 1 : \sin.\omega$ oder
$y : dk = 1 : \sin.\omega$ also
$dk = y . \sin.\omega$.

Weil nun $ek = eb + bk = y.\frac{dx}{dy} + y.\cos.\omega$

$= y(\frac{dx}{dy} + \cos.\omega)$

und überdem im rechtwinklichten Dreyecke edk
$ek : kd = 1 : \text{tang.}\,\mu$ und
$kd : ek = 1 : \text{tang.}\,\lambda$ oder

$y(\frac{dx}{dy} + \cos.\omega) : y \sin.\omega = 1 : \text{tang.}\,\mu$ oder

$\frac{dx}{dy} + \cos.\omega : \sin.\omega = 1 : \text{tang.}\,\mu$ und

$\sin.\omega : \frac{dx}{dy} + \cos.\omega = 1 : \text{tang.}\,\lambda$, so hat man

$$\text{tang.}\,\mu = \frac{\sin.\omega}{\frac{dx}{dy} + \cos.\omega}$$

$$= \frac{dy . \sin.\omega}{dx + dy . \cos.\omega} \text{ und}$$

$$\text{tang.}\,\lambda = \frac{\frac{dx}{dy} + \cos.\omega}{\sin.\omega}$$

$$= \frac{dx + dy . \cos.\omega}{dy . \sin.\omega}$$

Exempl. In der Ellipse ist $\frac{dx}{dy} = \frac{\sqrt{(px - \frac{p}{a}x^2)}}{\frac{1}{2}p - \frac{p}{a}x}$

mithin

$$\text{tang.}\mu = \frac{\text{sin.}\omega}{\frac{\sqrt{(px - \frac{p}{a}x^2)}}{\frac{1}{2}p - \frac{p}{a}x} + \text{cos.}\omega}$$

$$= \frac{(\frac{1}{2}p - \frac{p}{a}x)\,\text{sin.}\omega}{\sqrt{(px - \frac{p}{a}x^2)} + (\frac{1}{2}p - \frac{p}{a}x)\text{cos.}\omega}$$

Ist $\omega = 90°$, so ist sin. $\omega = 1$ und cos. $\omega =$
folglich wird

$$\text{tang.}\mu = \frac{\frac{1}{2}p - \frac{p}{a}x}{\sqrt{(px - \frac{p}{a}x^2)}} \text{ (§. 171.).}$$

$$\text{tang.}\lambda = \frac{\sqrt{(px - \frac{p}{a}x^2)}}{\frac{\frac{1}{2}p - \frac{p}{a}x}{\text{sin.}\omega} + \text{cos.}\omega}$$

$$= \frac{\sqrt{(px - \frac{p}{a}x^2)} + (\frac{1}{2}p - \frac{p}{a}x)\text{cos.}\omega}{(\frac{1}{2}p - \frac{p}{a}x)\,\text{sin.}\omega}$$

We

Wenn $\omega = 90°$, so wird

$$\text{tang. } \lambda = \frac{V(px - \frac{p}{\alpha} x^2)}{\frac{1}{2}p - \frac{p}{\alpha} x} \text{ (§. 170.).}$$

§. 173.

Aufgabe.

Die Tangente einer krummen Linie mit schiefwinklichten Coordinaten zu finden.

Auflösung.

In dem rechtwinklichten Drevecke edk hat man

$ed^2 = ek^2 + kd^2$; aber

$$ek^2 = y^2(\frac{dx}{dy} + \text{cos. } \omega)^2$$

$$= y^2(\frac{dx^2}{dy^2} + 2\frac{dx}{dy} \text{. cos. } \omega + \text{cos. } \omega^2),$$

und

$kd^2 = y^2$. sin. ω^2, folglich

$$ed^2 = y^2 \text{. sin. } \omega^2 + y^2(\frac{dx^2}{dy^2} + 2\frac{dx}{dy} \text{. cos. } \omega + \text{cos. } \omega^2)$$

$$= y^2(\text{sin. } \omega^2 + \frac{dx^2}{dy^2} + 2\frac{dx}{dy} \text{. cos. } \omega + \text{cos. } \omega^2), \text{ und}$$

sin. ω^2 + cos. $\omega^2 = 1$ (§.), also

$$ed^2 = y^2(1 + \frac{dx^2}{dy^2} + 2\frac{dx}{dy} \text{ cos. } \omega) \text{ und}$$

$ed =$

$$ed = y\sqrt{\left(1 + \frac{dx^2}{dy^2} + 2.\frac{dx}{dy}.\cos.\omega\right)}$$

Exempl. In der Parabel ist

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2y}{a}, \text{ also}$$

$$\frac{dx^2}{dy^2} = \frac{4y^2}{a^2} \text{ und}$$

$$ed = y\sqrt{\left(1 + \frac{4y^2}{a^2} + \frac{4y}{a}.\cos.\omega\right)}$$

$$= y\sqrt{\left(\frac{a^2 + 4y^2 + 4ay.\cos.\omega}{a^2}\right)}$$

$$= \frac{y}{a}\sqrt{(a^2 + 4y^2 + 4ay.\cos.\omega)}.$$

Ist der Winkel $\omega = 90°$, so ist $\cos.\omega = 0$, folglic

$$ed = \frac{y}{a}\sqrt{(a^2 + 4y^2)}$$

$$= \frac{\sqrt{ax}}{a}\sqrt{(a^2 + 4ax)}$$

$$= \sqrt{x}\sqrt{(a + 4x)}$$

$$= \sqrt{(ax + 4x^2)} \text{ (§. 159.)}.$$

§. 174.

Aufgabe.

Die Subnormale einer krummen Linie mi schiefwinklichten Coordinaten zu finden

Auflösung.

Weil dk senkrecht auf ei ist, so hat man

ek

ek : kd = kd : ki, oder

$y(\frac{dx}{dy} + \text{cos. } \omega) : y \text{ sin. } \omega = y \text{ sin. } \omega : ki$ oder

$\frac{dx}{dy} + \text{cos. } \omega : \text{sin. } \omega = y \text{ sin. } \omega : ki$ folglich

$$ki = \frac{y. \text{ sin. } \omega^2}{\frac{dx}{dy} + \text{cos. } \omega}.$$ Nun ist

bk = y cos. ω, folglich

$$bk + ki = bi = \frac{y. \text{ sin. } \omega^2}{\frac{dx}{dy} + \text{cos. } \omega} + y. \text{ cos. } \omega$$

$$= \frac{y. \text{ sin. } \omega^2 + y. \frac{dx}{dy}. \text{cos. } \omega + y. \text{cos. } \omega^2}{\frac{dx}{dy} + \text{cos. } \omega}$$

$$= \frac{y (\text{sin. } \omega^2 + \frac{dx}{dy}. \text{ cos. } \omega + \text{cos. } \omega^2)}{\frac{dx}{dy} + \text{cos. } \omega}$$

aber sin. ω^2 + cos. ω^2 = 1, mithin

$$bi = \frac{y (1 + \frac{dx}{dy}. \text{ cos. } \omega)}{\frac{dx}{dy} + \text{cos. } \omega}$$

$$= \frac{y (dy + dx. \text{ cos. } \omega)}{dx + dy. \text{ cos. } \omega}$$

Exempel. In der Ellipse ist

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\sqrt{(px - \frac{p}{a}x^2)}}{\frac{1}{2}p - \frac{p}{a}x},$$ folglich

$$bf = y \left[\frac{1 + \sqrt{(px - \frac{p}{a}x^2)}}{\frac{1}{2}p - \frac{p}{a}x} \cdot \text{cos.}\omega \right] \left[\frac{\sqrt{(px - \frac{p}{a}x^2)}}{\frac{1}{2}p - \frac{p}{a}x} \right]$$

$$= y \left(\frac{\frac{1}{2}p - \frac{p}{a}x + \sqrt{(px - \frac{p}{a}x^2)} \cdot \text{cos.}\omega}{\sqrt{(px - \frac{p}{a}x^2)} + (\frac{1}{2}p - \frac{p}{a}x)\text{cos.}\omega} \right)$$

$$= \sqrt{(px - \frac{p}{a}x^2)} \left(\frac{\frac{1}{2}p - \frac{p}{a} + \sqrt{(px - \frac{p}{a}} \text{cos.}\omega}{\sqrt{(px - \frac{p}{a}x^2)} + (\frac{1}{2}p - \frac{p}{a}x)\text{cos.}\omega} \right)$$

Ist $\omega = 90°$, folglich $\text{cos.}\omega = 0$, so wird

$$bi = \sqrt{(px - \frac{p}{a}x^2)} \left(\frac{\frac{1}{2}p - \frac{p}{a}x)}{\sqrt{(px - \frac{p}{a}x^2)}} \right)$$

=

$$= \tfrac{1}{2}p - \frac{p}{\alpha}x$$

$$= \frac{\alpha p - 2px}{\alpha} \text{ (§. 160.)}.$$

§. 175.

Aufgabe.

Die Normale einer krummen Linie mit schiefwinklichten Coordinaten zu finden.

Auflösung.

In dem rechtwinklichten Dreyecke dki ist

$$di^2 = dk^2 + ki^2$$

$$= \left(\frac{y \sin.\omega^2}{\frac{dx}{dy} + \cos.\omega}\right)^2 + y^2 \sin.\omega^2$$

$$= \frac{y^2 \sin.\omega^4}{\left(\frac{dx}{dy} + \cos.\omega\right)^2} + y^2 \sin.\omega^2$$

$$= \frac{y^2 \sin.\omega^2 + y^2 \sin.\omega^2 \left(\frac{dx}{dy} + \cos.\omega\right)^2}{\left(\frac{dx}{dy} + \cos.\omega\right)^2}$$

$$= \frac{y^2 (\sin.\omega^2 + \left(\frac{dx}{dy} + \cos.\omega\right)^2) \sin.\omega^2}{\left(\frac{dx}{dy} + \cos.\omega^2\right)}.$$

=

$$= y^2 \left(\sin.\omega^2 + \frac{dx}{dx} + 2\frac{dx}{dy}\text{cf.}\,\omega + \text{cf.}\,\omega\right.$$

$$\frac{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}{\left(\frac{dx}{dy} + \cos.\ \omega\right)^2}$$

$$= y^2.\left(\frac{dx^2}{dy^2} + 2\frac{dx}{dy}.\cos.\omega + 1\right)$$

$$\frac{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}{\left(\frac{dx}{dy} + \cos.\ \omega\ \right)^2}.\ \sin.\omega^2\,u.$$

$$di = y \sin.\omega \sqrt{\left(\frac{dx^2}{dy^2} + 2\frac{dx}{dy}.\cos.\omega + 1\right)}$$

$$\frac{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}{\frac{dx}{dy} + \cos.\omega.}$$

Achtes Kapitel.

Von den merkwürdigsten Punkten der krummen Linien mit rechtwinklichten Coordinaten.

§. 176.

Erklärung.

Die krummen Linien können eine gar mannigfaltige Lage gegen die Axe haben, auch selbst in ihrem Gange oder ihrer Richtung gar verschieden seyn. In allen diesen Fällen giebt es in den krummen Linien Punkte, welche für allen andern vorzüglich einer

ner Betrachtung werth sind. In vielen Fällen wächst die Applikate mit der Abscisse, nimmt aber hiernächst wieder ab, wenn gleich die Abscisse größer wird; in andern Fällen nimmt anfänglich die Applikate ab, wächst aber hierauf wieder mit der Abscisse. In diesen Fällen muß es einen Werth für die Applikate geben, welcher größer oder kleiner als alle vorhergehende und alle nachfolgende sind. Daher nennt man auch eine solche Applikate die größte oder kleinste.

§. 177.

Zusatz.

Es sey aglb (Fig. 43.) eine krumme Linie, so ist dg — ce = + fg und kl — hi = — im; mithin bleibt die Differenz der Differenz der Applikaten positiv, wenn sie zunehmen, wird aber negativ, wenn sie abnehmen. Hätte die krumme Linie eine solche Lage gegen die Axe, wie sie die 44 Fig. vorstellet, so wird df — ac = — ec und bk — hg = + ik; mithin wird die Differenz anfänglich negativ, wird aber hiernächst positiv. Soll nun eine Größe aus dem positiven ins negative oder aus dem negativen ins positive übergehen, so muß sie erst = o werden. Demnach muß die Differenz folglich auch das Differenzial der Applikaten = o werden, wenn ihre Werthe zuzunehmen oder abzunehmen aufhören. Wenn also eine größte oder kleinste Applikate statt haben soll, so muß dy = o seyn.

§. 178.

Aufgabe.

Die größte oder kleinste Applikate aus der gegebenen Gleichung einer krummen Linie zu finden.

Auflösung.

Weil y eine Funktion von x ist, so nehme man anfänglich $x+\Delta x$ und hernach $x-\Delta x$ statt x, so muß in beyden Fällen die Funktion kleiner als y werden, wenn y ein Größtes, im Gegentheil größer, wenn y ein Kleinstes ist. Man hat

I. $y+\frac{\Delta x dy}{dx}+\frac{\Delta x^2}{1.2}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{\Delta x^3}{1.2.3}\cdot\frac{d^3y}{dx^3}+\frac{\Delta x^4}{1.2.3.4}\cdot\frac{d^4y}{dx^4}+$ u. f.

II. $y-\frac{\Delta x dy}{dx}+\frac{\Delta x^2.d^2y}{1.2.dx^2}-\frac{\Delta x^3 d^3y}{1.2.3.dx^3}+\frac{\Delta x^4.d^4y}{1.2.3.4.dx^4}$ u. f.

Ist nun y ein Größtes, so wird erfordert, daß

$y > y+\frac{\Delta x dy}{dx}+\frac{\Delta x^2.d^2y}{1.2.dx^2}+\frac{\Delta x^3 d^3y}{1.2.3dx^3}+\frac{\Delta x^4.d^4y}{1.2.3.4.dx^4}+$ u. f.

und

$y > y-\frac{\Delta x dy}{dx}+\frac{\Delta x^2.d^2y}{1.2.dx^2}-\frac{\Delta x^3 d^3y}{1.2.3.dx^3}+\frac{\Delta x^4.d^4y}{1.2.3.4.dx^4}+$ u. f.

Ist aber y ein kleinstes, so muß

$y <$

$$y \lesseqgtr y + \frac{\Delta x dy}{dx} + \frac{\Delta x^2 d^2y}{1.2.dx^2} + \frac{\Delta x^3 d^3y}{1.2.3.dx^3} + \frac{\Delta x^4 d^4y}{1.2.3.4.dx^4} + \text{u. f.}$$

$$y \lesseqgtr y - \frac{\Delta x dy}{dx} + \frac{\Delta x^2 d^2y}{1.2\,dx^2} + \frac{\Delta x^3 d^3y}{1.2.3.dx^3} + \frac{\Delta x^4 d^4y}{1.2.3.4dx^4} - \text{u. f.}$$

Es kann Δx so klein angenommen werden, daß alle folgende Glieder der Reihen zusammengenommen weniger als das erste betragen. Nun läßt sich aber kein Größtes oder Kleinstes gedenken, woferne nicht dy mithin auch $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{\Delta x dy}{dx} = o$ ist; demnach differenzire man die gegebene Gleichung und setze das Differenzial $= o$: man wird sodann einen gewissen Werth für $x = X$ erhalten, welcher statt x in die gegebene Gleichung gesetzt einen gewissen Werth von y giebt, der in vielen Fällen ein Größtes oder Kleinstes ist. Um sich hiervon zu versichern, so nehme man den Werth, den y erhält $= Y$, und setze selbigen in obige Reihen so ergiebt sich

I. $$Y + \frac{\Delta x^2 d^2y}{1.2.dx^2} + \frac{\Delta x^3 d^3y}{1.2.3.dx^3} + \frac{\Delta x^4 . d^4y}{1.2.3.4.dx^4} + \text{u. f.}$$

und

II. $$y + \frac{\Delta x^2 d^2y}{1.2.dx^2} - \frac{\Delta x^3 d^3y}{1.2.3.dx^3} + \frac{\Delta x^4 . d^4y}{1.2.3.4dx^4} - \text{u. f.}$$

Es erhellet nun, daß beyde Werthe $\gtrless Y$ mithin Y ein Kleinstes seyn müsse, wenn $\frac{d^2y}{dx^2}$ bejahet, und

Gegentheil $< Y$ folglich Y ein Größres wenn $\frac{d}{d}$

verneint ist. Findet man aber auch $\frac{d^2y}{dx^2} = o$,

kann weder ein Größtes noch ein Kleinstes sta
finden, weil im ersten Falle

$$Y + \frac{\Delta x^3 d^3 y}{1.2.3 dx^3} + \frac{\Delta x^4 d^4 y}{1.2.3.4.dx^4} + u.f. >$$

im zweyten Falle aber

$$Y - \frac{\Delta x^3 d^3 y}{1.2.3 dx^4} + \frac{\Delta x^3 dy^3}{1.2.3.4 dx^4} - u.f. <$$

seyn würde. Hätte man ferner gefunden $\frac{d^3y}{dx^3} = o$

so wird sodann Y ein Kleinstes, wenn $\frac{d^4y}{dx^4}$ bejaht

aber ein Größtes, wenn $\frac{d^4y}{dx^4}$ verneint ist. Nimm
man überhaupt

$$I \quad - \quad - \quad - + \frac{\Delta x^n \, d^n \, y}{1.2.3 - n.dx^n} + \frac{\Delta x^{n+1} d^{n+1} y}{1.2.3 - n(n+1) dx^{n+1}} + u.f$$

$$II \quad - \quad - \quad - + \frac{\Delta x^n \, d^u \, y}{1.2.3 - n.dx^n} - \frac{\Delta x^{n+1} d^{n+1} y}{1.2.3 - n(n+1) dx^{n+1}} + u.f$$

also zwey auf einander folgende Glieder der Reihe
so erhellet, daß Y ein Größtes, wenn $\frac{d^n \, y}{dx^n}$ ne

gativ, Y aber ein Kleinstes, wenn $\frac{d^n \, y}{dx^n}$ positiv

ist; Wäre aber auch $\frac{d^n \, y}{dx^n} = o$ und $\frac{d^{n+1} y}{dx^{n+1}}$ end
lich, so findet weder ein Größtes noch Kleinstes statt.

§. 179.

§. 179.

Zusatz.

Die Gleichung für die Kreislinie
$y^2 = 2\varrho x - x^2$ giebt
$2ydy = 2\varrho dx - 2xdx$ und
$\frac{dy}{dx} = \frac{\varrho - x}{y}$.

Setzt man nun $\frac{\varrho - x}{y} = o$, so erhält man $\varrho - x = o$
und $\varrho = x$; demnach wird $y^2 = 2\varrho^2 - \varrho^2 = \varrho^2$ und
$y = \varrho$. Um nun zu erforschen, ob $y = \varrho$ ein Größtes oder Kleinstes ist, so suche man $\frac{d^2y}{dx^2}$ und man findet

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-ydx - (\varrho - x)\,dy}{y^2} \text{ und}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-y - (\varrho - x)\frac{dy}{dx}}{y^2};$$

Es ist aber $x = \varrho$ mithin $\varrho - x = o$, und es wird

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{y}{y^2} = -\frac{1}{y}.$$

Weil also $\frac{d^2y}{dx^2}$ verneinend ist, so ist $y = \varrho$ ein Größtes.

§. 180.

Zusatz.

Es sey ad (Fig. 45.) eine Abscissenlinie, $ab = a$ $ak = x$, $kl = y$, so hat man $bk = ak - ab =$

$em = x - \alpha$; ferner sey $ef = \varrho$, $eb = mk =$
mithin $lm = lk - mk = y - \beta$, und man hat

$$em : ml = ml : mg$$

$$x - \alpha : y - \beta = y - \beta : 2\varrho - x + \alpha, \text{ also}$$

$$(x - \alpha)(2\varrho - x + \alpha) = (y - \beta)^2 \text{ oder}$$

$$2\varrho x - x^2 + \alpha x - 2\varrho\alpha + \alpha x - \alpha^2 = y^2 - 2\beta y + \beta$$

$$2\varrho x + 2\alpha x - 2\varrho\alpha - x^2 - \alpha^2 = y^2 - 2\beta y + \beta^2$$

demnach

$$2\varrho dx + 2\alpha dx - 2x dx = 2y dy - 2\beta dy \text{ oder}$$

$$(\varrho + \alpha - x)\, dx = (y - \beta)\, dy \text{ und}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\varrho + \alpha - x}{y - \beta}.$$

Setzt man nun $\frac{\varrho + \alpha - x}{y - \beta} = o$, so ergiebt sich

$$\varrho + \alpha - x = o \text{ und}$$

$$x = \varrho + \alpha.$$

Diesen Werth in obige Gleichung gesetzt giebt

$$\varrho^2 = (y - \beta)^2 \text{ und}$$

$$\pm\varrho = y - \beta \text{ also}$$

$$\pm\varrho + \beta = y$$

differenziiret man zum zweytenmale, so hat man

$$\frac{d^2y}{dx} = \frac{-(y-\beta)\,dx - (\varrho + \alpha - x)\,dy}{(y-\beta)^2} \text{ und}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-(y-\beta) - (\varrho + \alpha - x)\frac{dy}{dx}}{(y-\beta)^2} \text{ oder}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-(y-\beta) - (\varrho + \alpha - x)\frac{(\varrho + \alpha - x)}{y-\beta}}{(y-\beta)^2}$$

Es war aber $x = \varrho + \alpha$, folglich

$dy =$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-(y-\beta)}{(y-\beta)^2} = -\frac{1}{y-\beta}$$

$$= \pm \frac{1}{\varrho}.$$

Weil also $\frac{d^2y}{dx^2}$ so wohl einen bejahten als auch einen verneinten Werth giebt, so muß $x = \varrho + \alpha$ der Applikate y so wohl ein Größtes als auch ein Kleinstes geben; es ist nemlich die größte Applikate $= \varrho + \beta = ch$ und die kleinste $= \beta - \varrho = ci$.

§. 181.

Zusatz.

Die Gleichung für die Ellipse

$y^2 = px - \frac{p}{\alpha} x^2$ giebt

$2ydy = pdx - \frac{2p}{\alpha} xdx$ und

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(p - \frac{2p}{\alpha}.x)}{2y}.$$

Setzt man $\frac{p - \frac{2x}{\alpha}.x}{2y} = 0$, so findet man

$p - \frac{2p}{\alpha}.x = 0$ und

$x = \frac{1}{2}\omega$.

Diesen Werth in obige Gleichung gesetzt giebt

$$y^2 = \tfrac{1}{2}p\alpha - \tfrac{1}{4}p\alpha$$
$$= \tfrac{1}{2}p\alpha \text{ und}$$
$$y = \tfrac{1}{2}\sqrt{p\alpha}.$$

Differenziiret man zum zweytenmale so erhält man

$$\frac{d^2y}{dx} = \frac{-4py}{\alpha}.dx - 2\left(p - \frac{2p}{\alpha}x\right)dy, \text{ und}$$
$$\frac{}{4y^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-4py}{\alpha} - 2\left(p - \frac{2p}{\alpha}x\right)\frac{dy}{dx}$$
$$\frac{}{4y^2}$$

$$= -4py - 2\left(p - \frac{2p}{\alpha}.x\right)\left(p - \frac{\frac{2p}{\alpha}.x}{2y}\right)$$
$$\frac{}{4y^2}$$

und statt x den Werth $\frac{1}{2}\alpha$ gesetzt

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{4py}{\alpha} = -\frac{p}{\alpha y}.$$
$$\frac{}{4y^2}$$

Es ist daher $y = \frac{1}{2}\sqrt{p\alpha}$ ein Größtes.

§. 182.

Zusatz.

Wenn y eine Funktion von x ist, so ist auch umgekehrt x eine Funktion von y. Es lassen sich demnach nach eben dieser Methode in einigen krummen Linien die größten und kleinsten Abscissen finden. Soll also die Abscisse den kleinsten oder größten Werth erhalten, so muß auch $dx = 0$ seyn.

§. 183.

Aufgabe.

Es ist die Gleichung einer krummen Linie gegeben, man soll die größte oder kleinste Abscisse suchen.

Auflösung.

Man setze zuerst $y+\Delta y$ und hernach $y-\Delta y$ statt y, so muß in beyden Fällen die Funktion kleiner als x werden, wenn x ein Größtes, und größer, wenn x ein kleinstes ist. Man erhält nun

I. $x+\frac{\Delta y dx}{dy}+\frac{\Delta y^2.d^2x}{1.2.dy^2}-\frac{\Delta y^3 d^3x}{1.2.3dy^3}+\frac{\Delta y^4.d^4x}{1.2.3.4.dy^4}$ u.s.-

II. $y-\frac{\Delta y dx}{dy}+\frac{\Delta y^2.d^2x}{1.2.dy^2}-\frac{\Delta y^3 d^3x}{1.2.3\,dy^3}+$

$\frac{\Delta x^4.d^4y}{1.2.3.4.dy^4}+$ u. s.

Weil aber kein Kleinstes und kein Größtes statt finden kann, woferne nicht dx, mithin $\frac{\Delta y dx}{dy}=o$ ist, so suche man den Werth von $\frac{dx}{dy}$ und setze selbigen $=o$. Findet man hieraus einen wirklichen Werth für y, so setze man diesen in die gegebene Gleichung der krummen Linie; man wird alsdenn einen gewissen Werth für x erhalten. Um sich nun zu versichern, ob x ein kleinstes oder ein Größtes sey, differenziire man zum zweytenmale oder suche den Werth von $\frac{d^2x}{dy^2}$; wird dieser nega-

tiv, so ist x ein Größtes, wird er aber positiv, so ist x ein kleinstes.

§. 184.

Zusatz.

Die Gleichung für die Kreislinie giebt

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y}{\varrho - x}.$$

Man setze $\frac{y}{\varrho - x} = 0$, so findet man $y = 0$.

Wird dieser Werth von y in die Gleichung $y^2 = 2\varrho x - x^2$ gesetzt, so erhält man

$$0 = 2\varrho x - x^2 \text{ folglich}$$
$$x^2 = 2\varrho x \text{ oder } x = 2\varrho.$$

Weiter findet man

$$\frac{d^2x}{dy} = \frac{(\varrho - x)\,dy + y\,dx}{(\varrho - x)^2} \text{ und}$$

$$\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{r - x + y\frac{dx}{dy}}{(\varrho - x)^2}$$

$$= \varrho - x + y.\left(\frac{y}{\varrho - x}\right)$$
$$\frac{}{(\varrho - x)^2}$$

$$= \frac{\varrho - 2\varrho}{(\varrho - 2\varrho)^2}$$

$$= \frac{-\varrho}{\varrho^2} = -\frac{1}{\varrho}.$$

Es ist also $x = 2\varrho$ ein Größtes.

§. 185.

Zusatz.

Aus der Gleichung $(x-\alpha)(2\varrho-x+\alpha)=(y-\beta)^2$ (§. 180.) erhält man

$$\frac{dx}{dy}=\frac{y-\beta}{\varrho+\alpha-x}.$$

Man nehme $\frac{y-\beta}{\varrho+\alpha-x}=0$, so wird

$$y=\beta.$$

Dieser Werth in die Gleichung gesetzt giebt

$$(x-\alpha)(2\varrho-x+\alpha)=0$$

und hieraus findet man

$$x=2\varrho+\alpha \text{ und}$$
$$x=\alpha.$$

Weiter ergiebt sich

$$\frac{d^2x}{dy}=\frac{(\varrho+\alpha-x)\,dy+(y-\beta)\,dx}{(\varrho+\alpha-x)^2} \text{ und}$$

$$\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{\varrho+\alpha-x+(y-\beta)\frac{dx}{dy}}{(\varrho+\alpha-x)^2}$$

$$=\frac{(\varrho+\alpha-x)+(y-\beta)\frac{y-\beta}{\varrho+\alpha-x}}{(\varrho+\alpha-x)^2}$$

und statt y den Werth β und statt x den ersten Werth $2\varrho+\alpha$ gesetzt

$$\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{\varrho+\alpha-2\varrho-\alpha}{(\varrho+\alpha-2\varrho-\alpha)^2}$$

$$=-\frac{1}{\varrho}.$$

Setzt man aber statt x den Werth α, so ergiebt sich

$$\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{\varrho + \alpha - \alpha}{(\varrho + \alpha - \alpha)^2}$$

$$= + \frac{1}{\varrho}.$$

Es ist demnach $x = 2\varrho + \alpha$ ein Größtes, und $x =$ ein Kleinstes.

§. 186.

Zusatz.

Die Gleichung für die Ellipse

$y^2 = px - \frac{p}{\alpha} x^2$ giebt

$$2ydy = (p - \frac{2p}{\alpha} x)\, dx \text{ und}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2y}{p - \frac{2p}{\alpha} \cdot x}.$$

Man setze diesen Werth $= o$, so wird

$$2y = o \text{ und } y = o$$

daraus ergiebt sich

$$o = px - \frac{p}{\alpha} x^2 \text{ oder}$$

$$x = \alpha.$$

Ferner erhält man

$$\frac{d^2x}{dy} = \frac{2(p - \frac{2p}{\alpha} x)\, dy + \frac{4py}{\alpha} dx \text{ und}}{(p - \frac{2p}{\alpha} x)^2}.$$

d^2x

$$\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{2\left(p - \frac{2p}{\alpha}.x\right) + \frac{4py}{\alpha} \cdot \frac{dx}{dy}}{\left(p - \frac{2p}{\alpha}x\right)^2}$$

$$= \frac{2\left(p - \frac{2p}{\alpha}x\right) + \frac{4py}{\alpha} \cdot \frac{2y}{p - \frac{2p}{\alpha}x}}{\left(p - \frac{2p}{\alpha}x\right)^2}$$

und statt x den Werth α und statt y den Werth o gesetzt

$$\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{2(p - 2p)}{(p - 2p)^2}$$

$$= \frac{2(-p)}{(-p)^2}$$

$$= -\frac{2}{p}.$$

Demnach ist α das Maximum von x.

§. 187.

Erklärung.

Eine Sehne eines Bogens einer krummen Linie ist die gerade Linie zwischen den Endpunkten dieses Bogens, so klein auch der Bogen seyn mag. Eine krumme Linie adf (Fig. 41.) ist nach der Gegend b hin hohl (concavus), wenn die Sehnen ad, df nach dieser Gegend zu Winkel machen, welche weniger als zwey rechte Winkel betragen, man

mag in der krummen Linie so viele drey Punk annehmen als man will; im Gegentheil nach d andern Seite hin, wie es die Fig. 44. vorstell erhaben (convexus). Eine krumme Linie ab (Fig. 46.), welche gegen eine Seite hin theil hohl, theils erhaben ist, heißt eine konkav-kon vexe Linie. Bey dieser giebt es allemal eine Punkt, welcher den hohlen Theil von dem erha benen absondert, und dieser wird der Beugungs punkt genennt.

§. 188.

Zusatz.

Man nehme im hohlen Theile die drey Ap plikaten ef, gh und iβ, und eg = gi = fn = mn = Δx an, und ziehe durch f und h die gerade fk, welche die verlängerte Applikate iβ in k schneiden wird, so sind beyde Dreyecke fhn und hlk einander gleich und ähnlich, weil fn = hl, der Winkel bey l = dem Winkel bey n und der Winkel f = h folglich nh = lk. Nun sind nh und lβ die Differenzen zweyer Applikaten, und die Differenz dieser beyden Differenzen = lβ − nh = lβ − lk = − Δ^2x, folglich ist die zweyte Differenz und daher auch das zweyte Differenzial im hohlen Theile negativ.

Man nehme ferner in dem erhabenen Theile die drey Applikaten op, qr, und sα, und ebenfalls oq = qs = pv = rt = Δx an, ziehe hierauf durch p und r die gerade pr, bis sie die Applikate sα in w schneide, so ist das Dreyeck pvr dem

Drey-

Dreyecke rtw gleich und ähnlich, mithin vr = tw. Weil aber vr und tα die Differenzen zweyer Applikaten, und die Differenz dieser Differenzen = tα − vr = tα − tw = αw, so sieht man, daß die zweyte Differenz mithin auch das zweyte Differenzial im erhabenen Theile positiv ist. Da nun das zweyte Differenzial aus dem negativen ins positive nicht anders übergehen kann, als wenn es einmal = o geworden, so ist klar, daß kein Beugungspunkt einer krummen Linie statt finden könne, wofern nicht das zweyte Differenzial von y in der gegebenen Gleichung der krummen Linie = o geworden ist.

§. 189.

Zusatz.

Wenn d (Fig. 47.) der Beugungspunkt einer krummen Linie seyn soll, so wird erfordert, daß der eine Theil bd der krummen Linie auf dieser, und der andere dh auf der andern Seite der Tangente ad, welche durch den Beugungspunkt geht, liege, weil in vielen Fällen $d^2y = o$ seyn kann ohne daß eben ein Beugungspunkt statt findet.

§. 190.

Aufgabe.

Den Beugungspunkt einer krummen Linie zu finden, wenn die Gleichung für selbige gegeben ist.

Auflösung.

Es sey $bc = x$, $cd = y$, $ce = df = \Delta$ und $fh = \Delta y$; ferner sey durch den Punkt d d Tangente da gezogen, welche eh in g schneid wird, so ist das Dreyeck acd dem Dreyecke d ähnlich, und man hat

$$ac : cd = df : fg \text{ oder}$$

$$y \cdot \frac{dx}{dy} : y = \Delta x : fg, \text{ also}$$

$$fg = \frac{\Delta x \cdot dy}{1 \cdot dx}, \text{ und}$$

$$gh = fh - fg \text{ oder}$$

$$gh = \Delta y - \frac{\Delta x \cdot dy}{1 \cdot dx}.$$

Es ist aber

$$\Delta y = \frac{\Delta x dy}{dx} + \frac{\Delta x^2 d^2y}{1.2.dx^2} + \frac{\Delta x^3 d^3y}{1.2.3.dx^3} + \frac{\Delta x^4 d^4y}{1.2.3.4.dx^4} + \text{u. f.}$$

mithin

$$gh = \frac{\Delta x^2 d^2y}{1.2\,dx^2} + \frac{\Delta x^3 d^3y}{1.2.3.dx^3} + \frac{\Delta x^4 d^4y}{1.2.3.4 dx^4} + \text{u. f.}$$

nachdem Δx als positiv oder negativ ist angenom men worden. Weil nun d^2y mithin $\frac{\Delta x^2 d^2y}{1.2.dx^2} =$ seyn muß, wenn ein Beugungspunkt statt finde soll, so suche man aus der gegebenen Gleichung de krummen Linie den Werth von $\frac{d^2y}{dx^2}$, und setze sel bigen $= o$; der Werth, welcher alsdenn für x

ge

gefunden wird, giebt in manchen Fällen einen Werth für y der den Beugungspunkt bestimmt. In diesem Falle suche man nemlich das dritte Differenzial $\frac{d^3y}{dx^3}$, und substituire in diesem Differenziale die vorhin gefundenen Werthe von x und y. Erhält nun dieses Differenzial einen gewissen Werth so findet allemal ein Beugungspunkt statt. Wäre aber $\frac{d^3y}{dx^3} = o$; aber $\frac{d^4y}{dx^4}$ geltend, so findet kein Beugungspunkt statt. Ueberhaupt seyn

$$---+\frac{\Delta x^n \; d^n \; y}{1.2.-n.dx^n}+\frac{\Delta x^{n+1} d^{n+1} y}{1.2.-n(n+1)dx^{n+1}}$$

zwey auf einander folgende Glieder in der Reihe, so wird kein Beugungspunkt statt finden können, wenn $\frac{d^n \; y}{dx^n}$ geltend gefunden wird; ist aber $\frac{d^n \; y}{dx^n} = o$, und $\frac{d^{n+1} y}{dy^{n+1}}$ geltend, so findet ein Beugungspunkt statt.

Exempel. Es sey die gegebene Gleichung für eine krumme Linie

$ax^2 + y = bx^3$ oder

$y = bx^3 - ax^2$, folglich

$dy = 3bx^2dx - 2axdx$ und

$\frac{dy}{dx} = 3bx^2 - 2ax$

$\frac{d^2y}{dx^2} = 6bx - 2a$; und

$o = 6bx - 2a$ also

$2a =$

$$2a = 6bx \text{ und}$$

$$x = \frac{a}{3b}.$$

Setzt man diesen Werth in die gegebene Gleichun so erhält man

$$y = \frac{ba^3}{27b^3} - \frac{a^2}{9b^2} \text{ oder}$$

$$y = \frac{a^3}{27b^2} - \frac{a^2}{9b^2} \text{ oder}$$

$$y = \frac{a^3 - 3a^2}{27b^2}.$$

Man differenziire ferner, so wird

$$\frac{dy^3}{dx^3} = 6b.$$

Weil man also für $\frac{d^2y}{dx^2}$ einen Werth findet, so fin det hier ein Beugungspunkt statt.

§. 191.

Erklärung.

Wenn eine krumme Linie eine solche Wendung nimmt, daß sich zwey Zweige derselben in einen Punkte, wie es die Fig. 48. vorstellet, schneiden so heißt alsdenn der Punkt d, wo sie sich schneiden, ein zweyfacher Punkt. Schneiden sich drey Zweige einer krummen Linie in einerley Punkt, so nennt man diesen Punkt einen dreyfachen Punkt. Ueberhaupt wird derjenige Punkt einer krummen Linie ein vielfacher Punkt genennt, wo sich mehrere Zweige derselben schneiden.

§. 192.

Zusatz.

Es sey ab (Fig. 48.) die Abscissenlinie, auf welche durch den zweyfachen Punkt d die Applikate de senkrecht herabgelassen worden, so ist die Tangente des einen Zweiges edg die Linie dh, die Subtangente ch, die Normale dk und die Subnormale ck, für den andern Zweig fde aber ist die Tangente dl, Subtangente cl, Normale di und Subnormale ci. Wäre demnach die Gleichung für diese Linie bekannt, und man sollte für den Punkt d oder für beyde Koordinaten ac und cd die Subtangente finden, so müssen nothwendig zwey Werthe für selbige gefunden werden nemlich hier ci und ck. Es müssen also bey einem zweyfachen Punkt für den Ausdruck $\frac{dy}{dx}$ zwey Werthe entstehen. Es ist leicht zu begreifen, daß bey einem dreyfachen Punkte für $\frac{dy}{dx}$ drey und überhaupt bey einem vielfachen Punkte für $\frac{dy}{dx}$ viele Werthe gefunden werden müssen.

§. 193.

Zusatz.

In der gegebenen Gleichung für die krumme Linie setze man $x + \Delta x$ und $y + \Delta y$ statt x und y, so erhält die Gleichung folgende allgemeine Form

$A\Delta x +$

$A\Delta x + B\Delta y + C\Delta x^2 + D\Delta x\Delta y + E\Delta y^2 + F\Delta x^3 +$
$G\Delta x^2\Delta y + H\Delta x\Delta y^2 + I\Delta y^3 + \text{u. f.} = 0$, n
A, B, C, D, E, F u. f. lauter Funktionen von
und y sind. Im Fall nun Δx und Δy unendli
klein werden, so ergiebt sich $A dx + B dy =$
mithin

$$\frac{dy}{dx} \cdot B = -A \text{ und}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{A}{B}.$$

Es kann nun möglich seyn, daß für gewisse Wer
the von x und y die Funktionen A und B zugleic
0 werden; also auch

$$\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}.$$

Aus dem, daß A und B zugleich 0 sind, folg
auch, daß $A\Delta x$ und $B\Delta y$ verschwinden. Hierau
erhält man nun die Gleichung

$$C\Delta x^2 + D\Delta x\Delta y + E\Delta y^2 + F\Delta x^3 +$$
$G\Delta x^2\Delta y + \text{u. f.} = 0$
und wenn Δx und Δy unendlich klein werden

$$C dx^2 + D dx dy + E dy^2 = 0.$$

Hieraus zieht man

$$C + D\frac{dy}{dx} + E\frac{dy^2}{dx^2} = 0$$

welche Gleichung für $\frac{dy}{dx}$ zwey Werthe giebt. Man
hat nemlich

$$\frac{dy^2}{dx^2} + \frac{D}{E} \cdot \frac{dy}{dx} = -\frac{C}{E} \text{ und daher}$$

$dy =$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{D}{2E} \pm V\left(-\frac{C}{E} + \frac{D^2}{4E^2}\right).$$

Sollten für gewisse Werthe von x und y auch die Funktionen C, D und E = o werden, so ist die Gleichung noch gegeben durch

$$F\Delta x^2 + G\Delta x^2\Delta y + H\Delta x\Delta y^2 + I\Delta y^3 + \text{u. f.} = o$$

und wenn Δx nnd Δy unendlich klein sind

$$Fdx^2 + Gdx^2 dy + Hdxdy^2 + Idy^3 = o.$$

Hieraus ergiebt sich

$$F + G.\frac{dy}{dx} + H.\frac{dy^2}{dx^2} + I.\frac{dy^3}{dx^3} = o$$

und man erhält für $\frac{dy}{dx}$ drey Werthe.

Man wird nun leicht einsehen, daß eine Gleichung vom vierten Grade aufgelöset werden müßte, wenn F, G, H, I verschwinden u. f.

§. 194.

Aufgabe.

Untersuchen, wie viel vielfache Punkte in einer krummen Linie es gebe.

Auflösung.

Man differenziire die gegebene Gleichung für die krumme Linie, und suche den Werth von $\frac{dy}{dx}$; setze hierauf so wohl den Zähler als auch den Nenner = o und suche aus diesen beyden Gleichungen so viele Werthe von x und y als angehen will. Diese

gefundenen Werthe von x und y setze man in
Gleichung der krummen Linie, und bemerke, wel
Werthe von x und y selbige zu o machen. D
durch wird man also entweder nur ein Paar o
mehrere Paare von Coordinaten finden, wo
folglich mehrere Subnormalen gehören. Im F
nur ein Paar Coordinaten gefunden worden s
det nur ein vielfacher Punkt statt, sonst aber eb
so viele vielfache Punkte als Paare von Coor
naten bestimmt werden können.

Exempel. Es sey die Gleichung für die krumm
Linie

$x(x-b)^2 = y^2(y-a)^2$, so ergiebt sich

$(x-b)^2\,dx + 2x(x-b)\,dx = 2y(y-a)^2\,dy +$
$2y^2(y-a)\,dy$ oder

$((x-b)^2 + 2x(x-b))\,dx = (2y(y-a)^2 + 2$
$(y-a))\,dy$ oder

$(3x-b)(x-b)\,dx = (4y^2 - 2ya)(y-a)\,dy$ u

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(3x-b)(x-b)}{(4y^2-2ya)(y-a)}.$$

Nun setze man $(3x-b)(x-b) = o$, so find
man
entweder $x = b$ oder
$x = \frac{1}{3}b$
nachdem entweder durch $3x-b$ oder durch $x-$
dividiret wird;
ferner sey $(4y^2 - 2ya)(y-a) = o$, mithin
entweder $y = a$ oder
$y = \frac{1}{2}$
nachdem entweder durch $4y^2 - 2ya$ oder durch $y-$
dividiret wird.

Es ist also

entweder $x = b$ und $y = a$

oder $x = b$ — $y = \frac{1}{2}a$

oder $x = \frac{1}{3}b$ — $y = a$

oder $x = \frac{1}{3}b$ — $y = \frac{1}{2}a$.

In die gegebene Gleichung $x(x-b)^2 = y^2(y-a)^2$ oder $x(x-b)^2 - y^2(y-a)^2 = o$ setze man nun b statt x und a statt y so erhält man $o = o$, also wird auch $\frac{dy}{dx} = \frac{o}{o}$, und die Coordinaten b und a gehören zur krummen Linie. Weil nun $\frac{dy}{dx}$ durch eine Gleichung vom ersten Grade nicht bestimmt werden kann, so hat auch $\frac{dy}{dx}$ mehrere Werthe (193.), und es findet folglich da ein vielfacher Punkt statt, wo $x = b$ und $y = a$ ist.

Setzt man ferner in der Gleichung b statt x und $\frac{1}{2}a$ statt y, so wird

$$o - \frac{1}{4}a^2\left(\frac{1}{2}a - a\right)^2 = o$$
$$-\frac{1}{2}a + a = o$$

welches nicht statt finden kann.

Weiter setze man $\frac{1}{3}b$ statt x und a statt y so ergiebt sich

$$\frac{1}{3}b\left(\frac{1}{3}b - b\right)^2 - o = o$$
$$\frac{1}{3}b - b = o$$

welches wiederum nicht angehet.

Auch $\frac{1}{3}b$ statt x und $\frac{1}{2}a$ statt y gesetzet giebt keinen geltenden Werth. Daraus erhellet aber, daß hier nur ein vielfacher Punkt statt habe, nemlich der, wo $x = b$ und $y = a$ ist.

§. 195.

Aufgabe.

Untersuchen, wie vielfach ein Punkt in einer krummen Linie sey.

Auflösung.

Wenn man $\frac{dy}{dx} = \frac{o}{o}$, mithin die Coordinaten gefunden hat, welche zu einem vielfachen Punkt gehören, so differenziire man weiter mit der Voraussetzung daß dx so wohl als dy als beständig betrachtet werden. Sobald man einen Werth für $\frac{dy}{dx}$ gefunden hat, so wird es darauf ankommen, wie vielmal ist differenziiret worden; denn eben dadurch wird der Grad der Gleichung bestimmt, welche den Werth für $\frac{dy}{dx}$ giebt. So groß nun der Grad der Gleichung ist, so viele Wurzeln wird man daraus ziehen können, und eben so viele Zweige der krummen Linie werden durch den vielfachen Punkt gehen, welche alsdenn zugleich bestimmen, wie vielfach der Punkt ist.

Exempel. In der Gleichung $x(x-b)^2 = y^2(y-a)$ fand daselbst ein vielfacher Punkt statt, wo $x=$ und $y=a$ war. Nun hat man gefunden

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(3x-b)(x-b)}{(4y^2-2ya)(y-a)} \text{ oder}$$

$$(4y^2-2ya)(y-a)\,dy = (3x-b)(x-b)\,d$$

folg

folglich wird

$(12y^2 - 12y + 2a^2)\,dy^2 = (6x - 4b)\,dx^2$ und

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{6x-4b}{12y^2-12y+2a^2} = \frac{3x-2b}{6y^2-6y+a^2}$$

$$= \frac{2b-2b}{6a^2-6a+a^2} = \frac{b}{5a^2-6a}$$

folglich $\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{\frac{b}{5a^2-6a}}$.

Weil hier also zwey Werthe für $\frac{dy}{dx}$ statt haben, so ist der gesuchte Punkt ein zweyfacher Punkt.

§. 196.

Zusatz.

Wenn also ein zweyfacher Punkt in einer krummen Linie statt finden soll, so werden die beyden Wurzeln der Gleichung unter dieser allgemeinen Form enthalten seyn

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{D}{2E} \pm \sqrt{\left(-\frac{C}{E} + \frac{D^2}{4E^2}\right)}\ (\S.\ 193.).$$

Wenn $\frac{D^2}{4E^2} > \frac{C}{E}$, so sind beyde Wurzeln reel, mithin auch die beyden Zweige der krummen Linie die sich in dem Punkte schneiden. Ist aber $\frac{D^2}{4E^2} < \frac{C}{E}$, so sind beyde Wurzeln imaginär, mithin auch die Zweige der krummen Linie d. h. der Endpunkt der Applikate gehöret zwar zur krummen Linie, er liegt

liegt aber ausserhalb der krummen Linie; man ne
ihn den konjugirten Punkt. Wären die b
den Wurzeln zwar reel, aber einander gleich,
sind auch die Tangenten und Subtangenten beyd
Zweige einander gleich; demnach schneiden bey
Zweige einander eigentlich nicht, sondern sie
rühren einander nur in diesem Punkte.

Neuntes Kapitel.

Vom Krümmungskreise und von d
Evoluten.

§. 197.

Erklärung.

Es sey fdg (Fig. 49.) eine algebraische kru
me Linie, ihre Axe ac, nm für den Punkt d
Tangente, und dc die Normale. Man nehme
dieser Normale den Halbmesser de, und beschre
hiermit den Kreis dil. Fiel nun ein Theil die
Kreises zwischen der Tangente dn und zwischen
nem Theil der krummen Linie, so würde er an die
Stelle weniger Krümmung als der Theil d
krummen Linie haben. Je kleiner aber der Ha
messer des Kreises wird, desto mehr Krümmu
bekommt der Kreis selbst, folglich auch der Th
welcher zwischen der Tangente und dem Theil d
krummen Linie liegt. Hierdurch nähert sich a
die Krümmung dieses Theils der Krümmung d

krummen Linie, mithin liegt auch der Durchschnittspunkt des Kreises mit der krummen Linie dem Punkte d näher. Fällt der Durchschnittspunkt h des Kreises mit der krummen Linie dem Punkte d unendlich nahe, oder welches einerley ist, fällt er mit dem Punkte d zusammen, so hat alsdenn an dieser Stelle d der Kreis mit der krummen Linie einerley Krümmung, und er heißt der Krümmungskreis (circulus osculator) und sein Halbmesser der Krümmungshalbmesser (radius oculi s. radius curvaturae).

§. 198.

Zusatz.

Die Tangente mn für den Punkt d der krummen Linie fdg ist zugleich die Tangente des Krümmungskreises. Denn beyde der Krümmungskreis und die krumme Linie haben in der Gegend d nur ein Element gemein, und für dieses Element ist mn die gemeinschaftliche Tangente.

§. 199.

Aufgabe.

Es ist die Gleichung der algebraischen krummen Linie gegeben, man soll den Halbmesser der Krümmung für einen jeden Punkt der krummen Linie finden.

Auflösung.

Es sey ab = x und bd = y oder die beyden Coordinaten für den Punkt d. Weil nun die

Tan-

Tangente mn die gemeinschaftliche Tangente de Krümmungskreises und der krummen Linie fdg is so muß auch der Mittelpunkt dieses Kreises in de Normale dc irgendwo liegen. Er sey e; ferne sey dh das gemeinschaftliche Element des Krüm mungskreises mit der krummen Linie, welche in de Gegend d mit dem Kreise einerley Krümmun hat; durch h ziehe man ho senkrecht auf ac, d und durch den Mittelpunkt e die Linie ep mit a parallel; so erhellet, daß bo = pr = dq = dx un qh = dy; weiter hat man

$$dc = y\sqrt{(1+\frac{dy^2}{dx^2})}\ (\S.\ 156.).$$

$$hq = hr - qr = hr - dp = d\,(dp) = dy$$

Die beyden Dreyecke dpe und bdc sind einander ähnlich und man hat

$$dc : db = de : dp \text{ oder}$$

$$y\sqrt{(1+\frac{dy^2}{dx^2})} : y = de : dp \text{ oder}$$

$$\sqrt{(1+\frac{dy^2}{dx^2})} : 1 = de : dp, \text{ mithin}$$

$$dp = \frac{de}{\sqrt{(1+\frac{dy^2}{dx^2})}} \text{ und}$$

$$d\,(dp) = -\frac{de \cdot d\sqrt{(1+\frac{dy^2}{dx^2})}}{1+\frac{dy^2}{dx^2}}.$$

Nimmt man dx beständig, so wird

$$d\sqrt{(1+\frac{dy^2}{dx^2})} = d(1+\frac{dy^2}{dx^2})^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{2dyd^2y}{dx^2}$$

$$= \left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{dy.d^2y}{dx^2}$$

$$= \frac{dyd^2y}{dx^2\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{1}{2}}}, \text{ mithin}$$

$$d(dp) = \frac{-de.}{1+\frac{dy^2}{dx^2}} \cdot \frac{dyd^2y}{dx^2\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{1}{2}}} \text{ oder}$$

$$dy = \frac{-de.\,dyd^2y}{dx^2\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}; \text{ also}$$

$$1 = \frac{-de.\,d^2y}{dx^2\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}; \text{ oder}$$

$$dx^2\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}} = -de.\,d^2y$$

$$de = -\frac{dx^2}{d^2y}\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Man setze den Halbmesser der Krümmung $de = \varrho$, so ist

$$\varrho = -\frac{dx^2}{d^2y}\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$= -\frac{dx^2}{d^2y}\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}$$

$$= -\frac{dx^2+dy^2\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{d^2y\qquad dx}$$

$$= -\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dxd^2y} = \frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{-dxd^2y}$$

Dieser Ausdruck scheint für den Halbmesser der Krümmung einen verneinenden Werth zu geben, da er doch in diesem Falle bejahend seyn muß, weil die Linie gegen die Abscissenlinie hohl angenommen ist. Der Grund davon liegt bloß in dem Differenziale von y oder von der Applikate. Denn das zweyte Differenzial d^2y ist bey einer solchen krummen Linie, welche gegen die Abscissenlinie hohl ist, allemal negativ; demnach sollte eigentlich in dem vorigen Ausdrucke $-d^2y$ statt $+d^2y$ stehen, und $-(-d^2y)$ ist eben so viel als $+d^2y$, wodurch eben der Halbmesser der Krümmung positiv wird.

Wäre im Gegentheil die krumme Linie gegen die Abscissenlinie erhaben, so wird d^2y positiv, und der Halbmesser der Krümmung negativ, mithin liegt er in Rücksicht der Abscissenlinie auf der andern Seite der krummen Linie.

Man suche also aus der gegebenen Gleichung der krummen Linie die Werthe von dx, dy und d^2y in Funktionen von x oder y, und setze selbige in obigen allgemeinen Ausdruck, so erhält man den Halbmesser der Krümmung. Hierbey ist aber vorausgesetzet worden, daß dx beständig ist, und die Coordinaten rechtwinklicht sind.

Sollte bey rechtwinklichten Coordinaten auch dx veränderlich seyn, so setze man $\frac{dy}{dx} = p$, $\frac{dp}{dx} = q$, und man hat

$dp =$

$$dp = d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y\,dx - dy\,d^2x}{dx^2}, \text{ also}$$

$$q = \frac{dp}{dx} = \left(\frac{d^2y\,dx - dy\,d^2x}{dx^2}\right) : dx$$

$$= \frac{d^2y\,dx - dy\,d^2x}{dx^3}$$

$$= \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} \cdot \frac{d^2x}{dx^2}.$$

Betrachtet man aber dx als beständig, so wird

$$dp = d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx}$$

$$q = d\left(\frac{dy}{dx}\right) : dx = \frac{d^2y}{dx^2}$$

und in diesem Falle ist

$$\varrho = \frac{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{-q}.$$

Für das veränderliche dx ist nun

$$q = \frac{dy^2}{dx^2} - \frac{dy}{dx} \cdot \frac{d^2x}{dx^2}, \text{ mithin}$$

$$\varrho = \frac{(1 + \frac{dy^2}{dx^2})^{\frac{2}{2}}}{\frac{dy}{dx} \cdot \frac{d^2x}{dx^2} - \frac{d^2y}{dx^2}}$$

$$= \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dy\,d^2x - dx\,d^2y}.$$

§. 200.

Zusatz.

Es sey die gegebene Gleichung die Gleichung der Parabel oder

$$y^2 = px, \text{ so ist}$$
$$2ydy = pdx \text{ und}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{2y} \text{ und}$$
$$\frac{dy^2}{dx^2} = \frac{p^2}{4y^2}.$$

Betrachtet man dx als beständig, so ist ferner

$$2yd^2y + 2dy^2 = 0$$
$$yd^2y + dy^2 = 0$$
$$\frac{dy^2}{y} = -d^2y \text{ und}$$
$$dx^2 = \frac{4y^2dy^2}{p^2}, \text{ mithin}$$
$$-\frac{dx^2}{d^2y} = \frac{4y^2dy^2}{p^2} : \frac{dy^3}{y}$$
$$-\frac{dx^2}{d^2y} = \frac{4y^3}{p^2}$$

Es wird demnach der Halbmesser der Krümmung

$$\varrho = \frac{4y^3}{p^2}\left(1 + \frac{p^2}{4y^2}\right)^{\frac{3}{2}}$$
$$= \frac{4y^3}{p^2}\left(\frac{4y^2+p^2}{4y^2}\right)^{\frac{3}{2}}$$
$$= \frac{4y^3}{p^2} \cdot \left(\frac{4y^2+p^2}{8y^3}\right)^{\frac{3}{2}}$$

=

$$= \frac{(4y^2+p^2)^{\frac{3}{2}}}{2p^2}$$

$$= \frac{(4y^2+p^2)\sqrt{(4y^2+p^2)}}{2p^2}$$

oder wenn man eine Funktion von x haben will

$$\varrho = \frac{(4px+p^2)\sqrt{(4px+p^2)}}{2p^2}$$

$$= \frac{(4x+p)\sqrt{(4px+p^2)}}{2p}.$$

§. 201.

Zusatz.

Die Gleichung für die Ellipse

$y^2 = px - \frac{p}{a}x^2$ giebt

$2ydy = pdx - \frac{2p}{a}xdx$ und

$\frac{dy}{dx} = p - \frac{2p}{a}.x$ und

$$\frac{dy^2}{dx^2} = \frac{(p-\frac{2p}{a}.x)^2}{4y^2}$$

$$= \frac{(p-\frac{2p}{a}.x)^2}{4(px-\frac{p}{a}x^2)}$$

Setzt man dx beständig, so erhält man ferner

$2yd^2y +$

$$2yd^2y + 2dy^2 = -\frac{2p}{\alpha} dx^2 \text{ oder}$$

$$yd^2y + dy^2 = -\frac{p}{\alpha} dx^2 \text{ oder}$$

$$yd^2y + (p - \frac{2p}{\alpha}x) \cdot dx^2 = -\frac{p}{\alpha} \cdot dx^2 \text{ oder}$$

$$\frac{}{4(px - \frac{p}{\alpha}x^2)}$$

$$-\frac{dx^2}{d^2y} = \frac{4\alpha(px - \frac{p}{\alpha}x^2)^{\frac{3}{2}}}{\alpha(p - \frac{2p}{\alpha}x)^2 + 4p(px - \frac{p}{\alpha}x^2)}$$

$$= \frac{4(px - \frac{p}{\alpha}x^2)^{\frac{3}{2}}}{(p - \frac{2p}{\alpha}x)^2 + \frac{4p}{\alpha}(px - \frac{p}{\alpha}x^2)}$$

$$= \frac{4(px - \frac{p}{\alpha}x^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2}$$

Daher wird der Halbmesser der Krümmung

$$\varrho = \frac{4(px - \frac{p}{\alpha}x^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2} \cdot \frac{\left(1 + (p - \frac{2p}{\alpha}x)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{4(px - \frac{p}{\alpha}x^2)}$$

$$= \frac{4(px - \frac{p}{\alpha}x^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2} \cdot \frac{(4(px - \frac{p}{\alpha}x^2) + (p - \frac{2px}{\alpha})^2)^{\frac{3}{2}}}{8(px - \frac{p}{\alpha}x^2)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= \frac{(4(px - \frac{p}{a}x^2) + (p - \frac{2p}{a}x)^2)^{\frac{3}{2}}}{2p^2}$$

$$= \frac{(p^2 + 4(1 - \frac{p}{a})(px - \frac{p}{a}x^2))^{\frac{3}{2}}}{2p^2}$$

§. 202.

Zusatz.

Für schiefwinklichte Coordinaten sey ab (F. 42.) $= x$, $bd = y$, $ak = z$ und $kd = t$, so wird hier wenn so wohl dz als dt als veränderlich betrachtet werden, der Halbmesser der Krümmung

$$\varrho = \frac{(dz^2 + dt^2)^{\frac{3}{2}}}{dt.d^2z - dzd^2t}$$

In dem Dreyecke bdk hat man nun

$1 : \sin.\omega = bd : dk$ oder

$1 : \sin.\omega = y : dk$ und

$dk = y.\sin.\omega$

$1 : \cos.\omega = y : bk$ und

$bk = y.\cos.\omega$ mithin

$ak = ab + bk = x + y.\cos.\omega$.

Hieraus ergiebt sich nun

$dt = dy.\sin.\omega$ und

$dz = dx + dy.\cos.\omega$.

Ferner ist

$dt^2 = dy^2.\sin.\omega^2$

$dz^2 = dx^2 + 2dxdy.\cos.\omega + dy^2.\cos\omega^2$

$d^2t = d^2y.\sin.\omega$

$d^2z = d^2x + d^2y.\cos\omega$, mithin

dt.

$dt.d^2z = dyd^2x \sin.\omega + dyd^2y \sin.\omega.\cos.\omega$
$dz.d^2t = dxd^2y \sin.\omega + dyd^2y \sin\omega\cos.\omega$
$dt.d^2z - dzd^2t = dy.d^2x.\sin.\omega - dxd^2y \sin.$
$= (dy.d^2x - dxdy^2 (\sin.\omega^2)$
$dz^2 + dt^2 = dx^2 + 2dxdy.\cos.\omega + dy^2 (co$
$\omega^2 + \sin.\omega^2)$
$= dx^2 + 2dxdy.\cos.\omega + dy^2$
weil $\cos.\omega + \sin.\omega = 1$.

Substituiret man nun alle diese gefundenen We the in diese Gleichung

$$\varrho = \frac{(dz^2 + dt^2)^{\frac{3}{2}}}{dt\,d^2z - dzd^2t}, \text{ so erhält man}$$

$$\varrho = \frac{(dx^2 + 2dxdy\cos.\omega + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{(dy.d^2x - dxd^2y)\sin.\omega}$$

Soll auch hier dx beständig seyn, so wird $d^2x = 0$ und man hat

$$\varrho = \frac{(dx^2 + 2dxdy.\cos.\omega + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{-dxd^2y.\sin.\omega}$$

$$= \frac{(dx^2 + 2dxdy.\cos.\omega + dy^2 . dx^2)^{\frac{3}{2}}}{dx^2}$$

$$\frac{}{-dxd^2y.\sin.\omega}$$

$$= -\left(1 + \frac{2dy}{dx}.\cos\omega + \frac{dy^2}{dx}\right)^{\frac{3}{2}} . \frac{dx^3}{dxd^2y.si.}$$

$$= -\left(1 + \frac{2dy}{dx}.\cos.\omega + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}} . dx^3$$

$$\frac{}{-dxd^2y.\sin.\omega}$$

$$= -\left(1 + \frac{2dy}{dx}.\cos.\omega + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}} . \frac{dx^2}{d^2y\,si.}$$

In

In der Parabel ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{2y}$$

$$\frac{dy^2}{dx^2} = \frac{p^2}{4y^2}$$

$$\frac{dx^2}{d^2y} = -\frac{4y^3}{p^2}$$

mithin erhält man den Halbmesser der Krümmung

$$\varrho = -\left(1 + \frac{p}{y}\cos.\omega + \frac{p^2}{4y^2}\right)^{\frac{3}{2}}\left(-\frac{4y^3}{p^2 \sin.\omega}\right)$$

$$= \left(\frac{4y^2 + 4py.\cos.\omega + p^2}{4y^2}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{4y^3}{p^2.\sin.\omega}\right)$$

$$= \frac{(4y^2 + 4py.\cos.\omega + p^2)^{\frac{3}{2}}}{8y^3} \cdot \frac{4y^3}{p^2.\sin.\omega}$$

$$= \frac{(4y^2 + 4py.\cos.\omega + p^2)^{\frac{3}{2}}}{2p^2 \sin.\omega}.$$

Ist $\omega = 90°$, folglich $\cos.\omega = 0$ und $\sin.\omega = 1$, so wird

$$\varrho = \frac{(4y^2 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{2p^2}$$ (§. 200).

§. 203.

Erklärung.

Es sey eine vollkommen beugsame Schnur um die erhabene Seite einer krummen Linie kfa (Fig. 50.) so gelegt, daß der äußerste Theil ab gerade ist; hierauf wickele man den Faden von der krummen Linie ab, dergestalt daß der Theil, welcher

cher nicht mehr um die erhabene Seite der kru
men Linie liegt, in eine gerade Linie gespannt
wie fe oder hg, so beschreibt der Punkt a ei
krumme Linie aei. Man sagt alsdenn, di
krumme Linie sey aus der Abwickelung d
krummen Linie kfa erzeuget (ex evolutio
descripta); aus diesem Grunde nennt man
krumme Linie kfb die Evolute (evolutae cu
vae aei).

§. 204.

Zusatz.

Der abgewickelte Faden wie fe ist allemal de
Theil fb der Evolute und der geraden ba gleic
auch berühret selbiger in einer jeden Lage fe
Evolute kfb.

§. 205.

Lehrsatz.

Die abgewickelte Linie wie fe ist für eine
jeden Punkt der durch die Abwickelung erzeugte
Linie wie e der Krümmungshalbmesser.

Beweis.

Es sey el der mit dem Halbmesser fe beschrie
bene Kreis- Man nehme nun in der verlänger
ten ef den Punkt o willkührlich an, so daß oe >
fe und ziehe durch o die Linie ki, welche eine Tan
gente für die Evolute wird, so wird selbige den
Kreis el in l und die krumme Linie ai in i schnei
den.

den. Durch l ziehe man lf, welche = fe = fb + ba; ausserdem ist nun ki = kf + fb + ba, mithin auch ki = kf + fe, und ki > kl; hieraus folgt, daß der Theil ei der aus der Abwickelung erzeugten Linie ausserhalb des Kreises el fällt. Man nehme ferner me in fe kleiner als fe an, so wird der Kreis en mit dem Halbmesser me beschrieben innerhalb des Kreises el fallen, folglich wird auch kein Kreis zwischen dem Bogen ei und dem Kreisbogen el hindurch gehen. Endlich ist ko + of > khf, mithin auch ko + of + fe > khf + fe oder ko + oe > ki und oe > ki − ko oder oe > oi. Hieraus folget, daß der Kreis mit dem Halbmesser oe > oi beschrieben ausserhalb ei fallen müsse; demnach ist fe der Halbmesser der Krümmung für den Punkt e.

§. 206.

Zusatz.

Wird also für irgend einen Punkt in der durch die Abwickelung erzeugten Linie eine Tangente gezogen, so steht sie zugleich senkrecht auf der von der Evolute abgewickelten geraden Linie.

§. 207.

Aufgabe.

Es ist die Gleichung für die durch die Abwickelung erzeugten Linie gegeben, man soll daraus eine Gleichung für ihre Evolute finden.

Auflösung.

Es sey bf (Fig. 51.) die Evolute der krum
men Linie ae, fe für die Stelle e der Halbmess
der Krümmung, ac die Abscisse = x und ce d
dazu gehörige Applikate = y. Ferner sey eh d
Tangente für den Punkt e, ch die Subtangent
eg die Normale und cg die Subnormale. Nu
ziehe man durch den Punkt f die Linie fd senkrec
auf dh. Weil das Verhältniß der krummen Lin
ae durch die Coordinaten x und y gegeben ist,
kömmt es darauf an, hieraus das Verhältniß d
beyden Coordinaten ad = z und df = t zu finde
Die beyden Dreyecke egc und gdf sind einand
ähnlich, und man hat

$$ce : eg = df : fg$$

Es ist aber $ef = -\frac{dx^2}{d^2y}(1+\frac{dy^2}{dx^2})\sqrt{(1+\frac{dy^2}{dx^2})}$

und die Normale $eg = y\sqrt{(1+\frac{dy^2}{dx^2})}$, folglich

$$ef - eg = fg$$
$$= -\frac{dx^2}{d^2y}(1+\frac{dy^2}{dx^2})\sqrt{(1+\frac{dy^2}{dx^2})} - y\sqrt{(1+\frac{dy^2}{dx^2})}$$
$$= -(\frac{dx^2}{d^2y}(1+\frac{dy^2}{dx^2})+y)\sqrt{(1+\frac{dy^2}{dx^2})}$$

daraus erhält man

$$y : y\sqrt{(1+\frac{dy^2}{dx^2})} = t : -(\frac{dx^2}{dy^2}(1+\frac{dy^2}{dx^2})+y)\sqrt{(1+\frac{dy^2}{dx^2})}$$

oder

$$1 : \sqrt{(1+\frac{dy^2}{dx^2})} = t : -(\frac{dx^2}{dy^2}(1+\frac{dy^2}{dx^2})+y)\sqrt{(1+\frac{dy^2}{dx^2})}$$

oder,

$1 : 1 = t : -(\frac{dx^2}{dy^2}(1+\frac{dy^2}{dx^2})-y$, mithin

$-(\frac{dx^2}{dy^2}(1+\frac{dy^2}{dx^2})-y = t$ und

$y = -t-\frac{dx^2}{d^2y}(1+\frac{dy^2}{dx^2})$ oder

$y = -t-\frac{dx^2+dy^2}{d^2y}$.

Ferner hat man aus beyden ähnlichen Dreyecken egc und gdf

$ec : cg = df : dg$ oder

$y : y\frac{dy}{dx} = t : gd$ oder

$1 : \frac{dy}{dx} = t : gd$, mithin

$gd = \frac{dy}{dx} \cdot t$.

Nun ist $ac = ad - cd$

$= ad - cg - gd$

$= ad - (cg+gd)$ oder

$x = z - (y.\frac{dy}{dx} + t.\frac{dy}{dx})$

$z - (y+t)\frac{dy}{dx}$

aber $y = -t - \frac{dx^2+dy^2}{d^2y}$ und

$y + t = -\frac{dx^2+dy^2}{d^2y}$ oder

$$-(y+t)=\frac{dx^2+dy^2}{d^2y}, \text{ folglich}$$

$$x=z+\left(\frac{dx^2+dy^2}{d^2y}\right)\frac{dy}{dx}$$

$$=z+\frac{dx^2}{d^2y}\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)\frac{dy}{dx}.$$

Man suche also aus der gegebenen Gleichung de krummen Linie die Coordinaten x und y in Funl tionen von z und t vermöge dieser beyden Gle chungen, worinn dx als beständig betrachte worden.

$$1.\ y=-t-\frac{dx^2}{d^2y}\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right) \text{ und}$$

$$2.\ x=z+\frac{dx^2}{d^2y}\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)\frac{dy}{dx}$$

und setze diese Werthe in die gegebene Gleichung so erhält man eine Gleichung zwischen z und welche die Natur der Evolute ausdrucket.

§. 208.

Zusatz.

Es sey die gegebene Linie eine Parabel, alse

$$y^2=px \text{ und}$$

$$2ydy=pdx$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{p}{2y} \text{ und}$$

$$\frac{dy^2}{dx^2}=\frac{p^2}{4y^2}; \text{ ferner}$$

y^2dz+

$$2yd^2y + 2dy^2 = 0 \text{ oder}$$
$$yd^2y + dy^2 = 0 \text{ und}$$
$$\frac{yd^2y}{dx^2} + \frac{dy^2}{dx^2} = 0 \text{ oder}$$
$$\frac{yd^2y}{dx^2} + \frac{p^2}{4y^2} = 0 \text{ und}$$
$$\frac{dx^2}{d^2y} = -\frac{4y^2}{p^2}; \text{ also wird}$$
$$y = -t + \frac{4y^3}{p^2}\left(1 + \frac{p^2}{4y^2}\right)$$
$$= -t + \frac{4y^3}{p^2} + y$$
$$0 = -t + \frac{4y^3}{p^2} \text{ und}$$
$$t = \frac{4y^3}{p^2}$$
$$p^2t = 4y^3$$
$$\frac{p^2t}{4} = y^3$$
$$\sqrt[3]{\frac{p^2t}{4}} = y$$

Ferner ist

$$x = z - \frac{4y^2}{p^2}\left(1 + \frac{p^2}{4y^2}\right)\frac{p}{2y}$$
$$= z - \left(\frac{2y^2}{p} + \frac{p}{2}\right)$$

$$= z - \left(\frac{2px}{p} + \frac{p}{2}\right)$$

$$= z - \left(2x + \frac{p}{2}\right) = z - 2x - \tfrac{1}{2}p, \text{ also}$$

$$3x = z - \tfrac{1}{2}p \text{ und}$$

$$x = \tfrac{1}{3}z - \tfrac{1}{6}p.$$

Setzt man diese Werthe von x und y in die gegebene Gleichung $y^2 = px$, so erhält man

$$\left(\sqrt[3]{\frac{p^2t}{4}}\right)^2 = \left(\tfrac{1}{3}z - \tfrac{1}{6}p\right) p \text{ oder}$$

$$\frac{p^{\frac{4}{3}}\, t^{\frac{2}{3}}}{4^{\frac{2}{3}}} = \tfrac{1}{3}pz - \tfrac{1}{6}p^2 \text{ oder}$$

$$\frac{p^{\frac{1}{3}}\, t^{\frac{2}{3}}}{4^{\frac{2}{3}}} = \tfrac{1}{3}z - \tfrac{1}{6}p \text{ und}$$

$$3p^{\frac{1}{3}}\, t^{\frac{2}{3}} = 4^{\frac{2}{3}}\left(z - \tfrac{1}{2}p\right) \text{ also}$$

$$27pt^2 = 16\left(z - \tfrac{1}{2}p\right)^3 \text{ und}$$

$$t^2 = \frac{16\left(z - \frac{1}{2}p\right)^3}{27p}$$

und dies ist die Gleichung, welche die Natur der Evolute für die Parabel ausdruckt.

§. 209.

Zusatz.

Wenn man bestimmen will, wo die Evolute fb ihren Anfang nimmt, so sieht man leicht, daß für den Halbmesser der Krümmung ba die beyden Coordinaten x und y verschwinden müssen. Man

suche demnach in der gegebenen Gleichung der krummen Linie den Halbmesser der Krümmung und setze in dem Ausdrucke so wohl x als auch y = o, so findet man den Halbmesser ab und dadurch zugleich den Anfangspunkt b der Evolute.

Zehntes Kapitel.

Von der Rektification der krummen Linien.

§. 210.

Erklärung.

Eine krumme Linie rektificiren heißt die die Größe derselben durch Rechnung finden.

§. 211.

Aufgabe.

Eine krumme Linie, deren Gleichung gegeben ist, zu rektificiren.

Auflösung.

Erster Fall.

Für rechtwinklichte Coordinaten.

Es sey ad (Fig. 52.) ein Theil einer krummen Linie, und die dazu gehörigen Coordinaten seyn ab = x und bd = y. Es nehme der Bogen ad um das unbestimmte Stück dgf = Δad zu, so

wird

wird auch die Abscisse ab um das unbestimmte Stück $bc = de = \Delta x$ und die Applikate bd um das unbestimmte Stück $ef = \Delta y$ zugenommen haben. Weil nun die Größe des Bogens ad von den dazu gehörigen Coordinaten x und y abhängt, mithin auch eine Funktion von x und y ist so muß auch die Größe des Zuwachses dgf von den Zuwächsen Δx und Δy abhangen folglich auch von diesen eine Funktion seyn. In dem rechtwinklichten Dreyecke dfe ist

$$fd^2 = de^2 + fe^2 \text{ oder}$$
$$fd^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2.$$

Je kleiner der Bogen dgf angenommen wird, deste näher ist der Punkt f dem Punkte d, desto kleiner werden auch Δx und Δy und desto mehr nähert sich der Bogen dfg seiner Sehne df. Es ist also in dem verschwindenden Zustande die Sehne df die Gränze des Bogens dgf, folglich

$$d(ad) = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}.$$

Aus der gegebenen Gleichung der krummen Linie suche man also den Werth von $\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ entweder in einer Funktion von x und dy oder y u. dy; integrire alsdenn; dieses Integral wird die Größe des Bogens ad ausdrucken. Sollte man etwa nicht im Stande seyn den Ausdruck $\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ in endlichen Ausdrückungen zu finden, so verwandele man selbigen in eine unendliche Reihe und integrire alsdenn jedes Glied, das Intregal wird aber die Länge des Bogens ad in einem solchen Falle nur durch Nährung geben.

Zwey-

Zweyter Fall.

Für schiefwinklichte Coordinaten.

Es sey ab (F. 53.) = x, und bd = y; aus dem Punkte d ziehe man die Linie dc senkrecht herab, und nehme ac = z und cd = t. Nun hat man vermöge des vorigen Falles $d(ad) = \sqrt{(dz^2 + dt^2)}$, und in dem rechtwinklichten Dreyecke bdc

bd : dc = 1 : sin. ω oder
y : t = 1 : sin. ω also
t : = y. sin. ω und
bd : cb = 1 : cos. ω oder
y : cb = 1 : cos. ω und
cb = y. cos. ω, mithin
cb + ba = z = x + y. cos. ω, also auch
dt = dy. sin. ω und
dz = dx + dy. cos. ω und
$dt^2 = dy^2$. sin. ω^2
$dz^2 = dx^2 + 2dx.dy.\cos.\omega + dy^2 \cos.\omega^2$;

demnach wird

$$d(ad) = \sqrt{(dx^2 + 2dxdy.\cos.\omega + (\sin.\omega^2 + \cos.\omega^2)dy^2)}$$
$$= \sqrt{(dx^2 + 2dxdy.\cos.\omega + dy^2)}$$

weil $\sin.\omega^2 + \cos.\omega^2 = 1$ ist
und $ad = s. \sqrt{(dx^2 + 2dxdy.\cos.\omega + dy^2)}$.

§. 212.

Zusatz.

Für die Gleichung der Kreislinie, wenn der Halbmesser = e, und die Abscissen aus dem Mittelpunkte genommen werden

$y^2 =$

$y^2 = \varrho^2 - x^2$ erhält man

$2ydy = -2xdy$ oder

$ydy = -xdy$ und

$dy = -\frac{xdx}{y}$, folglich

$dy^2 = \frac{x^2dx^2}{y^2}$

$= \frac{x^2dx^2}{\varrho^2 - x^2}$ und

$dy^2 + dx^2 = \frac{x^2dx^2}{\varrho^2 - x^2} + dx^2$

$dy^2 + dx^2 = \frac{(x^2 + \varrho^2 - x^2)\,dx^2}{\varrho^2 - x^2}$

$dy^2 + dx^2 = \frac{\varrho^2 dx^2}{\varrho^2 - x^2}$ und

$\sqrt{(dy^2 + dx^2)} = \frac{\varrho dx}{\sqrt{(\varrho^2 - x^2)}}$

$= \varrho(\varrho^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}dx$, folglich

$\int \sqrt{(dy^2 + dx^2)} = \int \varrho(\varrho^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$.

Nach der Newtonischen Regel suche man den Ausdruck $(\varrho^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$ und man findet

$(\varrho^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = \varrho^{-1} + \frac{1}{2}\varrho^{-3}x^2 + \frac{3}{2.4}\varrho^{-5}x^4 +$

$\frac{3.5}{2.4.6}\varrho^{-7}x^6 + \frac{3.5.7}{2.4.6.8}\varrho^{-9}x^8 + \frac{3.5.7.9}{2.4.6.8.10}$

$\varrho^{-11}x^{10}$ + u. s. also

$\varrho(\varrho^2 -$

$$\varrho(\varrho^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}dx = dx+\tfrac{1}{2}\varrho^{-2}x^2dx+\frac{3}{2.4}\varrho^{-3}x^4dx+\frac{3.5}{2.4.6}\varrho^{-6}x^6dx+\frac{3.5.7}{2.4.6.8}\varrho^{-8}x^8dx+\frac{3.5.7.9}{2.4.6.8.10}\varrho^{-10}x^{10}dx+\text{u. f.}$$

mithin das Integral

$$\int\frac{\varrho dx}{\sqrt{(\varrho^2-x)}} = x+\frac{1}{2.3}\varrho^{-2}x^3+\frac{3}{2.4.5}\varrho^{-3}x^5+\frac{3.5}{2.4.6.7}\varrho^{-6}x^7+\frac{3.5.7}{2.4.6.8.9}\varrho^{-8}x^9+\frac{3.5.7.9}{2.4.6.8.10.11}\varrho^{-10}x^{11}+\text{u. f.}$$

Diese Reihe drucket einen Kreisbogen aus, welcher durch die Abscisse x bestimmet wird. Eigentlich müßte noch eine beständige Größe zu diesem Integrale gesetzet werden, sie ist hier aber $=0$, wenn $x=0$ ist. Setzt man den Halbmesser $\varrho=1$, so wird jene Reihe

$$x+\frac{1}{2.3}.x^3+\frac{3}{2.4.5}x^5+\frac{3.5}{2.4.6.7}x^7+\frac{3.5.7}{2.4.6.8.9}x^9+\frac{3.5.7.9}{2.4.6.8.10.11}x^{11}+\text{u. f.}$$

und wenn die Abscisse x der Hälfte des Halbmessers, mithin hier $x=\frac{1}{2}$ gesetzet wird,

$$\tfrac{1}{2}+\frac{1}{2.3}.\frac{1}{8}+\frac{3}{2.4.5}.\frac{1}{32}+\frac{3.5}{2.4.6.7}.\frac{1}{128}+\frac{3.5.7}{2.4.6.8.9}.\frac{1}{512}+\frac{3.5.7.9}{2.4.6.8.10.11}.\frac{1}{2048}+\text{u.f.}$$

Die-

Diese Reihe druckt den zwölften Theil der ganze
folglich den sechsten Theil der halben Peripher
aus, weil $x = \frac{1}{2}$ einen Kreisbogen bestimm
welcher der dritte Theil eines Quadranten ist (§
124. Geom.). Wenn man also die Brüche die
ser Reihe in Decimalbrüche ausdrücket, und se
bige gehörig zusammenaddiret, so findet man fü
den Halbmesser = 1 den sechsten Theil der halbe
Peripherie; Man hat nemlich

$\frac{1}{2}$. = 0,

$\frac{1}{6}$. $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{2}$ = 0,020833333

$\frac{3}{40}$. $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{2}$ = 0,002343750

$\frac{15}{336}$. $\frac{1}{7}$ $\frac{1}{2}$ = 0,000348772

$\frac{105}{3456}$. $\frac{1}{9}$ $\frac{1}{2}$ = 0,000058334

$\frac{945}{42240}$. $\frac{1}{11}$ $\frac{1}{2}$ = 0,000010966 u. f.

0,523596055

Demnach die halbe Peripherie = 0,523596 — —
π 6 = 3,1415 — —. Es verhält sich also der Halb-
messer zur halben Peripherie = 1 : 3,1415 — und
eben dies ist auch das Verhältniß des Durchmes-
sers zur ganzen Peripherie. Man kann dies Ver-
hältniß bequem durch $1 : \pi$ ausdrucken, wenn π
die Zahl 3,1415 = — bedeutet.

Will man die Reihe in einer Funktion von y ausdrucken, so war

$$ydy = -xdx, \text{ folglich}$$

$$\frac{ydy}{x} = -dx \text{ und}$$

$$\frac{y^2dy^2}{x^2} = dx^2 \text{ oder}$$

$$\frac{y^2dy^2}{\varrho^2-y^2} = dx^2, \text{ mithin}$$

$$\frac{y^2dy^2}{\varrho^2-y^2} + dy^2 = dx^2 + dy^2 \text{ oder}$$

$$\frac{(y^2+\varrho^2-y^2)dy^2}{\varrho^2-y^2} = dx^2+dy^2$$

$$\frac{\varrho^2dy^2}{\varrho^2-y^2} = dx^2+dy^2 \text{ und}$$

$$\frac{\varrho dy}{\sqrt{(\varrho^2-y^2)}} = \sqrt{(dx^2+dy^2)} \text{ oder}$$

$$\varrho(\varrho^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}dy^2 = \sqrt{(dx^2+dy^2)} \text{ u.}$$

$$\int \varrho(\varrho^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}dy = \int\sqrt{(dx^2+dy^2)}$$

bey welchem Ausdrucke eben so wie vorher verfahren wird.

§. 213.

Zusatz.

Für die Gleichung der Parabel

$y^2 = ax$ ergiebt sich

$2ydy = adx$ und

$\frac{2ydy}{a} = dx$ und

$4y^2dy^2$

$$\frac{4y^2dy^2}{a^2} = dx^2, \text{ folglich}$$

$$\frac{4y^2dy^2}{a^2} + dy^2 = dx^2 + dy^2$$

oder $dy^2 + dx^2 = (\frac{4y^2}{a^2} + 1)\,dy^2$ und

$$V(dy^2 + dx^2) = dy V(1 + \frac{4y^2}{a^2}), \text{ also}$$

$$\int V(dy^2 + dx^2) = \int dy\, V(1 + \frac{4y^2}{a^2})$$

Vermöge der Newtonischen Regel findet man de Ausdruck

$$V(1 + \frac{4y^2}{a^2}) = 1 + \frac{2y^2}{a^2} - \frac{2y^4}{a^4} + \frac{4y^6}{a^6} - \frac{10y^8}{a^8} + \text{u. f.}$$

also

$$dy V(1 + \frac{4y^2}{a^2})dy = dy + \frac{2y^2dy}{a^2} - \frac{2y^4dy}{a^4} + \frac{4y^6}{a^6} - \frac{10y^8dy}{a^8} + \text{u. f.}$$

und

$$\int dy\, V(1 + \frac{4y^2}{a^2}) = y + \frac{2y^3}{3a^2} - \frac{2y^5}{5a^4} + \frac{4y^7}{7a^6} - \frac{10y^9}{9a^8} + \text{u. f.} + C.$$

Rechnet man den Bogen von da an, wo $y = 0$ wird, so ist auch $C = 0$ und es ist das vollständige Integral

$y +$

$$y + \frac{2y^3}{3a^2} - \frac{2y^5}{5a^4} + \frac{4y^7}{7a^6} - \frac{10y^9}{9a^8} + \text{u. f.}$$

Wenn also y bestimmt wird, so läßt sich aus dieser Reihe auch die Größe desjenigen Bogens finden, welcher zu der Applikate y gehöret.

Will man eine Fuktion von x haben, so braucht man nur in dem Ausdrucke

$$y\left(1 + \frac{2y^2}{3a^2} - \frac{2y^4}{5a^4} + \frac{4y^6}{7a^6} - \frac{10y^8}{9a^8} + \text{u. f.}\right)$$

statt $y = \sqrt{ax}$, statt $y^2 = ax$ u. f. zu setzen, und man erhält

$$\sqrt{ax}\left(1 + \frac{2ax}{3a^2} - \frac{2a^2x^2}{5a^4} + \frac{4a^4x^4}{7a^6} - \frac{10a^6x^6}{9a^8} + \text{u. f.}\right)$$

$$= \sqrt{ax}\left(1 + \frac{2x}{3a} - \frac{2x^2}{5a^2} + \frac{4x^4}{7a^2} - \frac{10x^6}{9a^2} + \text{u. f.}\right)$$

Für schiefwinklichte Coordinaten setze man in dem Ausdrucke

$$\sqrt{(dx^2 + 2dxdy \cdot \text{cof. } \omega + dy^2)}$$

statt dx und ax^2 die aus der Gleichung hergeleitete Funktion von y und dy, oder statt dy und dy^2 eine Funktion von x und dx. Es ist nemlich $2ydy = adx$ und

$$dx = \frac{2ydy}{a}$$

$$dx^2 = \frac{4y^2dy^2}{a^2}, \text{ mithin}$$

$$\sqrt{\left(\frac{4y^2dy^2}{a^2} + \frac{4ydy^2}{a} \cdot \text{cof. } \omega + dy^2\right)}$$

$$= dy\sqrt{\left(\frac{4y^2}{a^2} + \frac{4y}{a^2} \cdot \text{cof. } \omega + 1\right)}$$

$$= dy\sqrt{\left(\frac{4y^2 + 4y\alpha \text{ cof. } \omega + \alpha^2}{\alpha^2}\right)}$$

$$= \frac{1}{\alpha} dy \sqrt{(4y^2 + 4\alpha y \text{ cof. } \omega + \alpha^2)}.$$

Dieser Ausdruck müßte nun integriret werden.

Will man aber eine Funktion von x und d haben, so ist

$$dy = \frac{\alpha dx}{2y} = \frac{\alpha dx}{2\sqrt{\alpha x}} = \frac{dx\sqrt{\alpha}}{2\sqrt{x}} \text{ und}$$

$$dy^2 = \frac{\alpha^2 dx^2}{4\alpha x} = \frac{\alpha dx^2}{4x}, \text{ mithin}$$

$$\sqrt{\left(dx^2 + \frac{2dx^2\sqrt{a}}{2\sqrt{x}} \cdot \text{ cof. } \omega + \frac{\alpha dx^2}{4x}\right)}$$

$$= dx\sqrt{\left(1 + \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}} \cdot \text{ cof. } \omega + \frac{\alpha}{4x}\right)}$$

$$= dx\sqrt{\left(\frac{4x\sqrt{x} + 4x\sqrt{\alpha} \cdot \text{ cof. } \omega + \alpha\sqrt{x}}{4x\sqrt{x}}\right)}$$

$$= \frac{dy}{2x}\sqrt{(4\alpha^2 + 4\sqrt{x}\sqrt{\alpha} \cdot \text{ cof. } \omega + \alpha x)}.$$

und hiervon muß das Integral gesuchet werden.

Für die Familie der Parabeln

$y^m \alpha^{m-n} x^n$ erhält man

$$x^n = \frac{y^m}{\alpha^{m-n}} \text{ und}$$

$$x = y^{\frac{m}{n}} \alpha^{\frac{m-n}{n}}, \text{ folglich}$$

$$dx = my^{\frac{m}{n}-1} \alpha^{\frac{m-n}{n}} \cdot dy$$

=

$$= m y^{\frac{m-n}{n}} \cdot dy$$
$$\overline{n a^{\frac{m-n}{n}}}$$

$$dx^2 = \frac{m^2 y^{\frac{2m-2n}{n}}}{n^2 a^{\frac{2m-2n}{n}}} \cdot dy^2 \text{ und}$$

$$dx^2 + dy^2 = \frac{m^2 y^{\frac{2m-2n}{n}}}{n^2 a^{\frac{2m-2n}{n}}} \cdot dy^2 + dy^2$$

$$dx^2 + dy^2 = dy^2 \left(\frac{m^2 y^{\frac{2m-2n}{n}}}{n^2 a^{\frac{2m-2n}{n}}} + 1 \right) \text{ und}$$

$$\sqrt{(dx^2 + dydy)} \sqrt{\left(\frac{m^2 y^{\frac{2m-2n}{n}}}{n^2 a^{\frac{2m-2n}{n}}} + 1 \right)}$$

$$= dy \sqrt{\left(\frac{m^2}{n^2} y^{\frac{2m-2n}{n}} \cdot a^{-\frac{2m-2n}{n}} + 1 \right)}$$

Der Kürze wegen setze man $\frac{2m-2n}{n} = \varrho$, so wird

$$\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = dy \sqrt{\left(\frac{m^2}{n^2} y^{\varrho} \cdot a^{-\varrho} + 1 \right)}$$

Ferner nehme man $\frac{m^2}{n^2} \cdot a^{-\varrho} = \beta$, so erhält man

$$\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = dy \sqrt{(y^{\varrho} \beta + 1)};$$

endlich setze man noch $(y^{\varrho} \beta + 1) = z$ mithin

$$z^{-1} = y^{\varrho} \beta$$
$$\frac{z^{-1}}{\beta} = y^{\varrho} \text{ und}$$

$$(z-1)^{\frac{1}{\varepsilon}} = y \text{; folglich}$$

$$\frac{\frac{1}{\varepsilon}(z-1)^{\frac{1}{\varepsilon}-1}\,dz}{\beta^{\frac{1}{\varepsilon}}} = dy \quad \text{oder}$$

$$\frac{(z-1)^{\frac{1}{\varepsilon}-1}\,dz}{\varepsilon\beta^{\frac{1}{\varepsilon}}} = dy.$$

Setzt man nun diese Werthe von dy in den Ausdruck dy $(\sqrt{y^{\varepsilon}}\,\beta + 1)$, so ergiebt sich

$$\frac{(z-1)^{\frac{1}{\varepsilon}-1}\,dz\sqrt{z}}{\varepsilon\beta^{\frac{1}{\varepsilon}}} = \frac{(z-1)^{\frac{1}{\varepsilon}-1}\cdot\frac{1}{2}}{\varepsilon\beta^{\frac{1}{\varepsilon}}}\,z\,dz$$

Ist $\frac{\varepsilon}{1} - 1$ entweder eine ganze Zahl oder $= o$, so

läßt sich das Integral von dieser Differenzialfunktion in rationalen Ausdrückungen finden. Nun war aber

$\varepsilon = \frac{2m-2n}{n}$, folglich

$\frac{1}{\varepsilon} = \frac{n}{2m-2n} = \frac{n}{2(m-n)}$ und

$\frac{1}{\varepsilon} - 1 = \frac{n}{2(m-n)} - 1.$

Soll also das Integral wirklich rational gefunden werden, so muß

$\frac{n}{2(m-n)} - 1$ folglich auch $\frac{n}{2(m-n)}$ eine ganze positive Zahl seyn.

Wäre z. E. die Gleichung $y^3 = \alpha x^2$ für die Parabeln der zweyten Gattung gegeben, so ist hier $m = 3$ und $n = 2$ mithin

$\frac{n}{2(m-n)} = \frac{2}{2(3-2)} = 1$

und es läßt sich hier die Rektifikation in endlichen Ausdrücken finden. Man hat nemlich

$\frac{y^3}{\alpha} = x^2$ und

$x = V\left(\frac{y^3}{\alpha}\right) = y^{\frac{3}{2}} \cdot \alpha^{-\frac{1}{2}}$ mithin

$dx = \frac{3}{2} y^{\frac{3}{2}-1} \alpha^{-\frac{1}{2}}$

$= \frac{3}{2} y^{\frac{3}{2}} \alpha^{-\frac{1}{2}} dy$

$dx^2 = \frac{9}{4} y \alpha^{-1} dy^2$ und

$dx^2 + dy^2 = \frac{9}{4} y \alpha^{-1} dy^2 + dy^2$

$= \left(\frac{9}{4} y \alpha^{-1} + 1\right) dy^2$ und

$V(dx^2 + dy^2) = dy\, V\left(\frac{9}{4} y \alpha^{-1} + 1\right).$

Setzt man also

$\frac{9}{4}y\alpha^{-1}+1=z$, so wird

$z-1=\frac{9}{4}y\alpha^{-1}$ und

$\frac{4}{9}\alpha(z-1)=y$ folglich

$\frac{4}{9}\alpha dz=dy$ und daher

$$V(dx^2+dy^2)=\tfrac{4}{9}\alpha dz\,Vz=\tfrac{4}{9}\alpha z^{\frac{1}{2}}dz.$$

Hiervon ist das Integral

$$\frac{\frac{4}{9}\alpha z^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+C$$

$$=\frac{\frac{4}{9}\alpha z^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C$$

$$=\tfrac{8}{27}\alpha z\,Vz+C.$$

Setzt man statt z den vorigen Werth $\frac{9}{4}y\alpha^{-1}+1$, so ist

$$\tfrac{8}{27}\alpha z\,Vz+C=$$

$$\frac{8\alpha}{27}.(\tfrac{9}{4}y\alpha^{-1}+1)V(\tfrac{9}{4}y\alpha^{-1}+1)+C$$

$$=\frac{8\alpha}{27}.(\frac{9}{4\alpha}y+1)V(\frac{9}{4\alpha}.y+1)+C.$$

Soll die krumme Linie von der Stelle angerechnet werden, wo $y=o$ ist, und wo die Linie zugleich $=o$ ist, so wird

$$o=\frac{8\alpha}{27}(o+1)V(o+1)+C \text{ und}$$

$C=-\frac{8\alpha}{27}$ mithin das vollständige Integral

$$\frac{8\alpha}{27}(\frac{9}{4\alpha}.+1)V(\frac{9}{4\alpha}.y+1)-\frac{8\alpha}{27}.$$

§. 214.

Zusatz.

Für die Gleichung der Ellipse, wenn die Abscissen vom Mittelpunkte angerechnet werden

$y^2 = \frac{p}{a}(\frac{1}{4}a^2 - x^2)$ erhält man

$2ydy = -\frac{2p}{a}xdx$ und

$$dy = -\frac{\frac{2p}{a}xdx}{2y} = -\frac{\frac{p}{a}xdx}{y}$$

$$dy^2 = \frac{\frac{p^2}{a^2}x^2dx^2}{y^2}$$

$$= \frac{p^2x^2dx^2}{ap(\frac{1}{4}a^2 - x^2)}$$

$$= \frac{px^2dx^2}{\frac{1}{4}a^3 - ax^2}$$ und

$$y^2 + dx^2 = \frac{px^2dx^2}{\frac{1}{4}a^3 - ax^2} + dx^2$$

$$y^2 + dx^2 = (\frac{px^2}{\frac{1}{4}a^2 - ax^2} + 1)dx^2$$ und

$$\sqrt{(dy^2 + dx^2)} = dx\sqrt{(\frac{px^2}{\frac{1}{4}a^2 - ax^2} + 1)}$$

$$= dx\sqrt{(\frac{px^2 + \frac{1}{4}a^2 - ax^2}{\frac{1}{4}a^2 - ax^2})}.$$

Das Integral hiervon wird denjenigen Theil der Ellipse geben, welchen die Abscisse x bestimmt. Man findet nemlich

$$V\left(\frac{px^2+\frac{1}{4}a^3-ax^2}{\frac{1}{4}a^3-ax^2}\right)=1+\frac{2p}{a^3}x^2+\frac{2(4ap-p^2)}{a^6}x^4+$$
$$\frac{(8a-4p)(4ap-p^2)+4a^4p^2}{a^6}.x^6+\text{u.f.als}$$

$$dxV\left(\frac{px^2+\frac{1}{4}a^3-ax^2}{\frac{1}{4}a^3-ax^2}\right)=dx+\frac{2p}{a^3}x^2dx+\frac{2(4ap-p^2}{a^6}$$
$$x^4dx+$$
$$\frac{(8a-4p)(4ap-p^2)+4a^4p^2}{a^6}.x^6dx+\text{u.f.u}$$

$$\int dxV\left(\frac{px^2+\frac{1}{4}a^3-ax^2}{\frac{1}{4}a^2-ax^5}\right)=x+\frac{3}{2}\frac{p}{a^2}x^2+\frac{2}{5}\frac{4ap-p^2}{a^6}.x$$
$$+\frac{(8a-4p)(4ap-p^2)+4a^4p^2}{7a^6}.x^7+\text{u.f.}+($$

Soll der Bogen, welcher durch x bestimmt wird, von da den Anfang nehmen, wo $x=0$ ist, so ist auch $C=0$.

§. 215.

Zusatz.

Für die Gleichung der Hyperbel, wenn die Abscissen vom Scheitelpunkte angerechnet werden, $y^2=\frac{p}{a}(ax+x^2)$ hat man

$$ydy=(p+\frac{2p}{a}x)dx \text{ und}$$

$4y^2dy$

$$4y^2dy^2 = (p + \frac{2p}{a}x)^2 dx^2$$

$$dy^2 = \frac{(p + \frac{2p}{a}x)^2}{4(px + \frac{p}{a}x^2)} \cdot dx^2 \text{ und}$$

$$dy^2 + dx^2 = \left(\frac{(p + \frac{2p}{a}x)^2 + 4(px + \frac{p}{a}x^2)}{4(px + \frac{p}{a}x^2)} \right) dx^2$$

und

$$\sqrt{(dy^2 + dx^2)} = dx \sqrt{\left(\frac{(p + \frac{2p}{a}x)^2 + 4(px + \frac{p}{a}x^2)}{4(px + \frac{p}{a}x^2)} \right)}$$

folglich

$$\int \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = 1 \cdot dx \sqrt{\left(\frac{(p + \frac{2p}{a}x)^2 + 4(px + \frac{p}{a}x^2)}{4(px + \frac{p}{a}x^2)} \right)}.$$

Eilftes Kapitel.

Von der Quadratur der krummen Linien.

§. 216.

Erklärung.

Eine krumme Linie quadriren heißt den Quadratinhalt einer Fläche zu finden, welche theils von krummen theils von krummen und geraden Linien begränzt wird.

§. 217.

Aufgabe.

Eine krumme Linie zu quadriren, wenn die Gleichung derselben gegeben ist.

Auflösung.

Erster Fall.

Für rechtwinklichte Coordinaten.

Es sey ab (Fig. 25.) $=x$, bd $=y$ und ad der zu diesen Coordinaten gehörige Bogen einer algebraischen krummen Linie. Nimmt nun der Bogen ad um das unbestimmte Stück dfg zu, so nehmen auch die Coordinaten um bc $=\Delta x$ und ef $=\Delta y$ zu. Der Flächeninhalt des Rechteckes bdec $=$ bd $\times$ de $=y\Delta x$ und der des Dreyecks def $=$ ef $\times$ de $=\Delta y\Delta x$, mithin der Flächeninhalt

des

des Trapezii bdfc $= y\Delta x + \Delta x\Delta y$. Je kleiner nun der Bogen dgf angenommen wird, desto kleiner werden auch die Zuwächse Δx und Δy, desto mehr nähert sich also der Flächeninhalt des Trapezii bdf dem Flächeninhalt des Rechteckes bdec. In dem verschwindenden Zustande des Bogenelementes dfg ist wirklich bdfc $=$ bdec, also $= ydx$. Setzt man nun den Quadratinhalt der Fläche adb $= Q$, so ist der dazu gehörige Zuwachs dgfcb $= \Delta Q$; und weil in dem verschwindenden Zustande dgfbc $=$ bdfe $=$ bdec, so hat man auch $dQ = ydx$. In der gegebenen Gleichung wird nun y durch eine Funktion von x ausgedruckt. Setzt man also diese statt y in die Formel ydx, so erhält man für das Flächenelement eine Funktion von x und dx, welche alsdenn integriret wird, um den Quadratinhalt von einer Fläche zu finden, deren Größe von der Größe x abhängt. Will man aber eine Funktion von y und dy haben, so suche man aus der gegebenen Gleichung dx in einer Funktion von y und substituire selbige in ydx.

Zweyter Fall.

Für schiefwinklichte Coordinaten.

Es sey ab (Fig. 53) $=$ x, bd $=$ y und dc senkrecht auf ac, so hat man in dem rechtwinklichten Dreyecke bdc

$$bd : dc = 1 : \sin.\omega \text{ oder}$$
$$y : dc = 1 : \sin.\omega \text{ und}$$
$$dc = y.\ \sin.\omega.$$

Das Flächenelement, welches zur Fläche adb gehöret, ist dbet, und wird dem Parallellogramm

bdgc

bdge gleich, wenn be = Δx in dem verschwinden den Zustande sich befindet. Nun ist der Inhal des Parallellogramms bdge = be × dc = Δx. sin. ω, folglich in dem verschwindenden Zustand bdfe = dx. y sin. ω = dQ, wenn die Fläche adb = Q gesetzet wird. Sucht man demnach aus de gegebenen Gleichung der krummen Linie dx in ei ner Funktion von y oder y in einer Funktion vo x und substituiret entweder jene oder diese Funktio in den Ausdruck dx y sin. ω, so wird alsdenn da Integral davon den Quadratinhalt der Fläche adb entweder in einer Funktion von y oder in eine Funktion von x ausdrucken.

§. 218.

Aufgabe.

Es ist die Gleichung der Kreislinie gegeben man soll das Stück Kreisfläche cdeb (Fig. 54. quadriren, wenn cb = x, be = y, und ca = ϱ ist

Auflösung.

Aus $y^2 = \varrho^2 - x^2$ hat man

$y = \sqrt{(\varrho^2 - x^2)}$ mithin

$$ydx = dx\sqrt{(\varrho^2 - x^2)} = dx\,(\varrho^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$$

Man suche vermöge der Newtonischen Regel den Ausdruck $(\varrho^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$ man findet

$$(\varrho^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} = \varrho - \frac{1}{2\varrho}x^2 - \frac{1}{8\varrho^3}x^4 - \frac{1}{16\varrho^5}x^6 - \frac{5}{128\varrho^7}x^8 - \text{u. f. mithin}$$

dx

$$dx\sqrt{(\varrho^2-x^2)} = \varrho dx - \frac{1}{2\varrho}x^2dx - \frac{1}{8\varrho^3}x^4dx - \frac{1}{16\varrho^5}x^6 - \frac{5}{128\varrho^7}x\,dx - \text{u. f. und}$$

$$\int dx\sqrt{(\varrho^2-x^2)} = \varrho x - \frac{1}{3.2\varrho}\cdot x^3 - \frac{1}{5.8\varrho^3}x^5 - \frac{1}{7.16\varrho^5}x^7 - \frac{5}{9.128\varrho^7}x^9 - \text{u. f.}$$

Nimmt man $\varrho = 1$ an so ist

$$\int dx\sqrt{(1-x^2)} = x - \frac{1}{2.2}x^3 - \frac{1}{5.8}x^5 - \frac{1}{7.16}x^7 - \frac{5}{9.128}\cdot x^9 - \text{u. f.}$$

Will man eine Funktion von y haben, so giebt

$x^2 = \varrho^2 - y^2$ oder

$x = (\varrho^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}$

$dx = -\frac{1}{2}(\varrho^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}\,ydy$

$= -\frac{ydy}{\sqrt{(\varrho^2-y^2)}}$, also

$ydx = -\frac{y^2dy}{(\sqrt{\varrho^2-y^2})}$

$= -y^2dx\,(\varrho^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}$ und

$$\int y.dy =$$
$$-\int y^2 dy (\varrho^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}}$$

§. 219.

Zusatz.

Wird $x = \varrho$, so erhält man den Quadra
inhalt des Quadranten acd

$$= \varrho^2 - \frac{1}{6}\varrho^2 - \frac{1}{40}\varrho^2 - \frac{1}{112}\varrho^2 - \text{u. f.}$$

$$= \varrho^2 \left(1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{40} - \frac{1}{112} - \text{u. f.}\right)$$

bedeutet $\varrho = 1$, so ist der Inhalt

$$= 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{40} - \frac{1}{112} - \text{u. f.}$$

§. 220.

Zusatz.

Das Stück Kreisfläche debc besteht aus den
Kreisausschnitte ced und dem Dreyecke ebc, mit
hin der Flächeninhalt desselben

$$= \tfrac{1}{2}\text{ed.dc} + \tfrac{1}{2}\text{bc. be.}$$

Zu dem Bogen ed gehöret $bc = x$ als Sinus;
setzt man nun den Bogen $de = \alpha$ und $de = \varrho$, so
wird der Flächeninhalt des Stückes cdeb

$$= \tfrac{1}{2}.\varrho\alpha + \tfrac{1}{2}.\, x\sqrt{(\varrho^2 - x^2)}$$
$$= \tfrac{1}{2}\varrho\alpha + \tfrac{1}{2}.\,\text{sin.}\,\alpha.\,\text{cos.}\,\alpha$$
$$= \tfrac{1}{2}\varrho\alpha + \tfrac{1}{4}.\,\text{sin.}\,2\alpha\ (\text{§. 143.}).$$

§. 221.

Aufgabe.

Es sey $ab = x$, $be = y$, und $ac = \varrho$, man soll aus der Gleichung der Kreislinie den Flächeninhalt des Abschnittes aeb finden.

Auflösung.

Aus der Gleichung der Kreislinie

$y^2 = 2\varrho x - x^2$ erhält man

$y = V(2\varrho x - x^2)$ und

$ydx = dx\,V(2\varrho x - x^2)$

als das Flächenelement von aeb. Um nun hiervon das Integral zu bekommen, muß die Irrationalgröße in eine unendliche Reihe verwandelt werden. Der irrationale Ausdruck

$V(2\varrho x - x^2)$ giebt

$V2x\,V(\varrho - \frac{1}{2}x)$, und

man hat nur nöthig die irrationale Größe $V(\varrho - \frac{1}{2}x)$ in eine unendliche Reihe zu verwandeln, und jedes Glied mit $V2x$ zu multipliciren. Wenn man $\frac{1}{2}x$ statt x^2 und ϱ statt ϱ^2 (§. 218.) setzt, so findet man

$$V(\varrho - \tfrac{1}{2}x) = V\varrho - \frac{1}{4V\varrho}x - \frac{1}{4.8\varrho V\varrho}x^2 - \frac{1}{8.16\varrho^2 V\varrho}x^3 - \frac{5}{16.128\varrho^3 V\varrho}x^4 - \text{u. f. und}$$

$$V2x\,V(\varrho - \tfrac{1}{2}x) = V2\,V(\varrho x - \tfrac{1}{2}x^2)$$

$$= V2\left(V\varrho x - \frac{1}{4V\varrho}x^2 - \frac{1}{4.8\varrho V\varrho}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{1.16\varrho^2 V\varrho}x^{\frac{7}{2}} - \frac{5}{16.128\varrho^8 V\varrho}x^{\frac{9}{2}} - \text{u. f.}\right)$$

also

$$dx\,V(2\varrho x - x^2) = V2\left(\varrho^{\frac{1}{2}}.x^{\frac{1}{2}}dx - \frac{1}{4V\varrho}.x^{\frac{3}{2}}dx - \frac{1}{4.8\varrho V\varrho}.x^{\frac{5}{2}}dx - \text{u. f.}\right)$$ und

$$\int dx\,V(2\varrho x - x^2) = V2\left(\tfrac{2}{3}.\varrho^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} - \tfrac{2}{5}\frac{1}{4V\varrho}x^{\frac{5}{2}} - \tfrac{2}{7}.\frac{1}{4.8\varrho V\varrho}.x^{\frac{7}{2}} - \text{u. f.}\right)$$

$$= 2V2\left(\tfrac{1}{3}.\varrho^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} - \tfrac{2}{5}\frac{1}{4V\varrho}.x^{\frac{5}{2}} - \tfrac{2}{7}.\frac{1}{4.8\varrho V\varrho}.x^{\frac{7}{2}} - \text{u. f.}\right).$$

Ist $\varrho = 1$, so wird vorige Reihe

$$2V2\left(\tfrac{1}{3}.x^{\frac{3}{2}} - \tfrac{2}{5}.\tfrac{1}{4}x^{\frac{5}{2}} - \tfrac{2}{7}.\frac{1}{4.8}.x^{\frac{7}{2}} - \text{u. f.}\right).$$

§. 222.

Aufgabe.

Es ist ab (Fig. 55.) $= x$, bd $= y$, man soll aus der Gleichung für die Parabel den Flächeninhalt des Stücks adb finden.

Auflösung.

Aus der Gleichung $y^2 = ax$ erhält man

$$y = \sqrt{ax} \text{ und}$$

$$ydx = dx\sqrt{ax} = dx \cdot a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}$$

als das Flächenelement von adb. Das Integral davon ist

$$\frac{a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} x a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} + C$$

$$= \frac{2}{3} x\sqrt{ax} + C = \frac{2}{3} xy + C.$$

Wird $x = o$, wenn der Bogen $da = o$ wird, so wird selbst $C = o$ und es ist das vollständige Integral $\frac{2}{3}xy$.

§. 223.

Zusatz.

Für die Gattungen aller Parabeln ist $y^m = a^{m-n} x^n$, folglich,

$$y = a^{\frac{m-n}{m}} x^{\frac{n}{m}} \text{ und}$$

$$ydx = a^{\frac{m-n}{m}} x^{\frac{n}{m}} dx$$

$$\int ydx = a^{\frac{m-n}{m}} \frac{x^{\frac{n}{m}}}{\frac{n}{m}+1} + C$$

$$= \frac{m}{n+m} \cdot a^{\frac{m-n}{m}} x^{\frac{n}{m}+1}$$

$$= \frac{m}{n+m} \cdot xy + C.$$

§. 224.

Zusatz.

Für schiefwinklichte Coordinaten erhält m
aus der Gleichung der gemeinen Parabel

$$y^2 = ax$$

$$dx = \frac{2ydy}{a} \text{ und}$$

$$dxy \sin. \omega = \frac{2y^2 \sin. \omega \, dy}{a}.$$

Hiervon ist das Integral

$$\frac{2}{3}.\frac{y^2 \sin. \omega}{a} + C$$

$$= \frac{2}{3}\frac{ax. y \sin. \omega}{a} + C$$

$$= \frac{2}{3} xy. \sin. \omega + C$$

Wird die Fläche = o, wenn x = o ist so ist au
C = o, und das Integral

$$\frac{2}{3} xy. \sin. \omega.$$

§. 225.

Aufgabe.

Den Quadratinhalt des paraboliſchen Stück
bdef (Fig. 55.) zu finden, wenn bf = x un
fe = y iſt.

Auflöſung.

Es ſey ab = β, ſo iſt af = ab + bf = β +
x, und wenn α der Parameter

$a(\beta + x) = y^2$ oder
$a\beta + ax = y^2$ und
$\sqrt{(a\beta + ax)} = y$.

Man setze $\sqrt{(a\beta + ax)} = z$, so hat man
$(a\beta + ax) = z^2$ und
$a\,dx = 2z\,dz$

$$dx = \frac{2z}{a}\,dz.$$

Demnach wird

$$y\,dx = dx\sqrt{(a\beta + ax)}$$
$$= \frac{2z^2}{a}\,dz \text{ und daher}$$

$$\int y\,dx = \tfrac{2}{3}\cdot\frac{z^3}{a} + C$$
$$= \tfrac{2}{3}(\beta + x)\sqrt{(a\beta + ax)} + C.$$

Um nun die constans zu bestimmen, so sieht man leicht, das der ganze paraboliſche Raum $= o$ wird wenn $x = o$ wird, folglich

$o = \frac{2}{3}(\beta + o)\sqrt{(a\beta + o)} + C$
$o = \frac{2}{3}\beta\sqrt{a\beta} + C$ und
$C = -\frac{2}{3}\beta\sqrt{a\beta}$.

Es ist also der Quadratinhalt des paraboliſchen Stücks bdef $=$

$$\tfrac{2}{3}(\beta + x)\sqrt{(a\beta + ax)} - \tfrac{2}{3}\beta\sqrt{a\beta}.$$

§. 226.

Aufgabe.

Es ist db (Fig. 56.) $= x$, de $= y$, und die Gleichung für die Ellipse gegeben, man soll den Flächeninhalt bced suchen.

Auflösung.

Aus der gegebenen Gleichung

$$y^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2}(\alpha^2 - x^2)$$ erhält man

$$y = \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{(\alpha^2 - x^2)}$$ und

$$ydx = \frac{\beta}{\alpha}.dx\sqrt{(\alpha^2 - x^2)}$$

Für den Ausdruck $\sqrt{(\alpha^2 - x^2)}$ findet man, w
beym Kreise, wenn hier α^2 statt ϱ^2 §. 218 gesetz
wird

$$= \alpha - \frac{1}{2\alpha}x^2 - \frac{1}{8\alpha^3}x^4 - \frac{1}{16\alpha^5}.x^6 - \frac{5}{128}$$

x^8 — u. f.

$$dx\sqrt{(\alpha^2 - x^2)} = \alpha dx - \frac{1}{2\alpha}x^2 dx - \frac{1}{8\alpha^3}.x^4 dx -$$

$$\frac{1}{16\alpha^5}.x^6 dx$$ — u. f.

folglich

$$\int\frac{\beta}{\alpha}.dx\sqrt{(\alpha^2 - x^2)} = \frac{\beta}{\alpha}\left(\alpha x - \frac{1}{2.3\alpha}x^3 -\right.$$

$$\left.\frac{1}{8.5\alpha^3}x^5 - \frac{1}{7.16\alpha^5}.x^7 - \text{u. f.}\right)$$

Wird $x = \alpha$ oder der halben großen Axe gleich
so wird der vierte Theil der Ellipse

$$= \frac{\beta}{\alpha}\left(\alpha^2 - \frac{1}{2.3}.\alpha^2 - \frac{1}{5.8}.\alpha^2 - \frac{1}{7.16}\alpha^2 -\right.$$

$$\left.\text{u. f.}\right)$$

$$= \frac{\beta}{\alpha} \cdot \alpha^2 \left(1 - \frac{1}{2.3} - \frac{1}{5.8} - \frac{1}{7.16} - \frac{5}{128} - \text{u. f.}\right)$$

$$= \beta\alpha \left(1 - \frac{1}{2.3} - \frac{1}{5.8} - \frac{1}{7.16} - \frac{5}{128} - \text{u. f.}\right)$$

§. 227.

Zusatz.

Wenn der Halbmesser des Kreises $= \alpha$ ist, so ist der Quadratinhalt des vierten Theils des Kreises

$$= \alpha^2 \left(1 - \frac{1}{2.3} - \frac{1}{5.8} - \frac{1}{7.16} - \frac{5}{128} - \text{u. f.}\right)$$

Ist also der Halbmesser eines Kreises der Hälfte der großen Axe einer Ellipse oder der ganze Durchmesser der ganzen großen Axe gleich, so verhält sich der Viertelkreis zur Viertelellipse oder der ganze Kreis zur ganzen Ellipse wie $\alpha : \beta$ oder wie die halbe große Axe zur halben kleinen, oder wie die ganze große Axe zur ganzen konjugirten der Ellipse. Beschreibet man ferner mit dem Halbmesser $\sqrt{\alpha\beta}$ einen Kreis, so würde der Quadratinhalt des Viertelkreises gleich seyn

$$\sqrt{(\alpha\beta)^2} \left(1 - \frac{1}{2.3} - \frac{1}{5.8} - \frac{1}{7.16} - \frac{5}{128} - \text{u. f.}\right)$$

$$= \alpha\beta \left(1 - \frac{1}{2.3} - \frac{1}{5.8} - \frac{1}{7.16} - \frac{5}{128} - \text{u. f.}\right) \text{ d. h.}$$

Der Viertelkreis ist einer Viertelellipse mithin au der ganze Kreis der ganzen Ellipse gleich, wei der Halbmesser des Kreises die mittlere Propo tionallinie zwischen der Helfte beyder Axen oder d ganze Durchmesser die mittlere Proportionallin zwischen beyden Axen der Ellipse ist.

§. 228.

Aufgabe.

Es ist die Gleichung für die Hyperbel geg ben, man soll das Stück adb (Fig. 55.) quadrire

Auflösung.

Aus der gegebenen Gleichung für die Hyperbel

$$y^2 = px + \frac{p}{\alpha} x^2$$ erhält man

$$y = \sqrt{(px + \frac{p}{\alpha} x^2)}$$

$$= \sqrt{(\alpha px + px^2)} : \sqrt{\alpha}$$

$$= \sqrt{p}(\alpha x + x^2) : \sqrt{\alpha}$$

$$= \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{\alpha}} \sqrt{(\alpha x + x^2)}, \text{ mithin}$$

$$ydx = \sqrt{\frac{p}{\alpha}} . dx \sqrt{(\alpha x + x^2)}$$

$$= \sqrt{\frac{p}{\alpha}} . dx \sqrt{x} \sqrt{(\alpha + x)}.$$

Man entwickele $\sqrt{(\alpha + x)}$ in eine unendliche Reihe; man findet

$$\sqrt{(a+x)} = \sqrt{a} + \frac{1}{2\sqrt{a}}x - \frac{1}{8a\sqrt{a}}.x^2 + \frac{1}{16a^2\sqrt{a}}.x^3 - \frac{5}{128a^3\sqrt{a}}.x^4 + \text{u.f.}$$

und

$$x\sqrt{(a+x)} = a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2\sqrt{a}}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{8a\sqrt{a}}.x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{16a^2\sqrt{a}}x^{\frac{9}{2}} - \frac{5}{128a^3\sqrt{a}}x^{\frac{9}{2}} + \text{u.f.}$$

$$\sqrt{(ax+x^2)} = a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}dx + \frac{1}{2\sqrt{a}}x^{\frac{3}{2}}dx - \frac{1}{8a\sqrt{a}}x^{\frac{5}{2}}dx + \frac{1}{16a^2\sqrt{a}}x^{\frac{7}{2}}dx - \frac{5}{128a^3\sqrt{a}}x^{\frac{9}{2}}dx \text{ u. f.}$$

$$\frac{p}{a}\int dx\sqrt{(ax+x^2)} = \sqrt{\frac{p}{a}}\left(\frac{2}{3}a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{2.5.\sqrt{a}}x^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{7.8a\sqrt{a}}x^{\frac{7}{2}} + \frac{2}{9.16a^2\sqrt{a}}x^{\frac{9}{2}} - \frac{2.5}{11.128a^3\sqrt{a}}x^{11\frac{1}{2}} + \text{u.f.}\right) + C.$$

Es verschwindet hier aber die Fläche, wenn x verschwindet, mithin ist auch $C = o$, und es ist das vollständige Integral

$$2\sqrt{\frac{p}{a}}\left(\frac{1}{3}a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{5.2\sqrt{a}}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{7.8a\sqrt{a}}.x^{\frac{7}{2}} + \frac{1}{9.16a^2\sqrt{a}}x^{\frac{9}{2}} - \frac{5}{128a^3\sqrt{a}}.x^{11\frac{1}{2}} + \text{u. f.}\right).$$

§. 229.

§. 229.

Aufgabe.

Es ist die Gleichuug der Hyperbel zwischen ihren Asymptoten gegeben, man soll selbige quadriren.

Auflösung.

Aus der gegebenen Gleichung

$xy = \alpha^2$ erhält man

$$y = \frac{\alpha^2}{x} = \alpha^2 x^{-1} \text{ also}$$

$$y\,dx = \alpha^2 x^{-1}\,dx \text{ und daher}$$

$$\int y\,dx = \frac{\alpha^2 x^{-1+1}}{-1+1} = \frac{\alpha^2}{0} = \infty.$$

Es zeigt dies also einen Raum an, welcher unendlich ist, wenn der Anfangspunkt der Abscisse aus dem Mittelpunkte angenommen wird. Nimmt man aber den Anfangspunkt der Abscissen in irgend einem Punkte d (Fig. 57.) auf der einen Asymptote ae einer gleichseitigen Hyperbel, und setzt $ab = bc = \alpha$, $ad = \beta$, $de = x$ und $eg = y$, so hat man $ae = ad + de = \beta + x$ und

$bc^2 = ae \times eg$ oder

$\alpha^2 = (\beta + x).y$

$\alpha^2 = \beta y + xy$ und

$\frac{\alpha^2}{\beta + x} = y$ folglich

$$y\,dx = \frac{\alpha^2 dx}{\beta + x}.$$

Der

Der Bruch $\frac{a^2}{\beta+x}$ in eine unendliche Reihe verwandelt giebt

$$\frac{a^2}{\beta+x} = \frac{a^2}{\beta} - \frac{a^2x}{\beta^2} + \frac{a^2x^2}{\beta^3} - \frac{a^2x^3}{\beta^4} + \frac{a^2x^4}{\beta^5} - \frac{a^2x^5}{\beta^6}$$
$$+ \text{u. f. und}$$

$$\frac{a^2dx}{\beta+x} = \frac{a^2dx}{\beta} - \frac{a^2xdx}{\beta^2} + \frac{a^2x^2dx}{\beta^3} - \frac{a^2x^3dx}{\beta^4} + \frac{a^2x^4dx}{\beta^5}$$
$$- \frac{a^2x^5dx}{\beta^6} + \text{u. f. und}$$

$$\int \frac{a^2dx}{\beta+x} = \frac{a^2x}{\beta} - \frac{a^2x^2}{2\beta^2} + \frac{a^2x^3}{3\beta^3} - \frac{a^2x^4}{4\beta^4} + \frac{a^2x^5}{5\beta^5} -$$
$$\frac{a^2x^6}{6\beta^6} + \text{u. f.} + C.$$

Soll der Raum bey df angehen, so wird er $= o$, wenn $x = o$ ist, alsdenn ist auch $C = o$, und es ist der Quadratinhalt von fdeg $=$

$$a^2\left(\frac{x}{\beta} - \frac{x^2}{2\beta^2} + \frac{x^3}{3\beta^3} - \frac{x^4}{4\beta^4} + \frac{x^5}{5\beta^5} - \frac{x^6}{6\beta^6}\right.$$
$$\left. + \text{u. f.}\right).$$

Wird selbst $ad = ab = bc = a = \beta$, und setzt $a = 1$, so erhält man den Raum cbeg $=$

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \text{u. f.}$$

§. 230.

Zusatz.

Für die Familie der Parabeln zwischen ihren Asymptoten

$x^n y^m = \alpha^{m+n}$ erhält man

$y^m = \alpha^{m+n} \cdot x^{-n}$ und

$$y = \alpha^{\frac{m+n}{m}} x^{-\frac{n}{m}} \text{ und}$$

$$ydx = \alpha^{\frac{m+n}{m}} x^{-\frac{n}{m}} dx, \text{ mithin}$$

$$\int ydx = \alpha^{\frac{m+n}{m}} \frac{x^{-\frac{n}{m}+1}}{\frac{m-n}{m}} + C$$

$$= \frac{m}{m-n} \sqrt[m]{\alpha^{m+n}} \cdot x^{\frac{m-n}{m}} + C$$

$$= \frac{m}{m-n} \sqrt[m]{\alpha^{n+m}} \cdot \frac{x^m}{x^n} + C$$

$$= \frac{m}{m-n} \sqrt[m]{\alpha^{n+m}} \cdot x^m \cdot y^m + C$$

$$= \frac{m}{m-n} \cdot xy \sqrt[m]{\alpha^{n+m}} + C$$

Ist $m > n$, so findet man allemal den Raum adfkh, wenn $ad = x$ und $fd = y$ ist. Wäre nemlich $y^2 x = \alpha^3$, so wäre $m = 2$, $n = 1$, und $m - n = 2 - 1$, mithin der Flächenraum adfkh $= 2\alpha xy\sqrt{\alpha} + C$.

Ist aber $m < n$, so findet man den Flächenraum fdeg, weil alsdenn der ganze Ausdruck negativ wird. Wäre nemlich $x^2 y = \alpha^3$, so wäre $m = 1$ und $n = 2$, also der Flächenraum fdeg $=$

$$-\frac{\alpha^2}{x} = -xy + C.$$

§. 231.

Aufgabe.

Es ist die Gleichung der Zissoide gegeben, man soll selbige quadriren.

Auflösung.

Aus der gegebenen Gleichung

$y^2 = \frac{x^3}{2a-x}$ erhält man

$$y = \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{(2-x)}}$$

$$= x\sqrt{x}.(2a-x)^{-\frac{1}{2}} \text{ und}$$

$$ydx = x^{\frac{3}{2}}.(2a-x)^{-\frac{1}{2}}\,dx \text{ und}$$

$$\int ydx = \int x^{\frac{3}{2}}(2a-x)^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

oder, wenn man den Halbmesser $a = 1$ setzet

$$\int ydx = \int x^{\frac{3}{2}}(2-x)^{-\frac{1}{2}}\,dx.$$

Man verwandele also nun den Ausdruck $(2-x)^{-\frac{1}{2}}$ in eine unendliche Reihe, und man findet

$$(2-x)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2.2\sqrt{2}}x + \frac{3}{2.4.2^2\sqrt{2}}x^2 + \frac{3.5}{2.4.6.2^3\sqrt{2}}.x^3 \text{ u. f. und}$$

$$x^{\frac{3}{2}}(2-x)^{-\frac{1}{2}} = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2}}.dx + \frac{1}{2.2\sqrt{2}}x^{\frac{5}{2}}.dx + \frac{3}{2.4.2^2\sqrt{2}}.x^{\frac{7}{2}}dx + \frac{3.5}{2.4.6.2^3\sqrt{2}}.x^{\frac{9}{2}}$$

+ u. f. und

$$\int x^{\frac{1}{2}}(2-x)^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{2\cdot x^{\frac{5}{2}}}{5\sqrt{2}} + \frac{2}{7.2.2\sqrt{2}}x^{\frac{7}{2}} +$$

$$\frac{2.3}{9.2.4.2^2\sqrt{2}}x^{\frac{9}{2}} + \frac{2.3.5}{11.2.4.6.2^3\sqrt{2}}x^{11\frac{1}{2}} +$$

u. f. + C

$$= 2\left(\frac{x^{\frac{5}{2}}}{5\sqrt{2}} + \frac{x^{\frac{7}{2}}}{7.2.2\sqrt{2}} + \frac{3\cdot x^{\frac{9}{2}}}{9.2.4.2^2\sqrt{2}} + \right.$$

$$\left.\frac{3.5.x^{11\frac{1}{2}}}{11.2.4.6.2^3\sqrt{2}} + \text{u. f.}\right) + C.$$

§. 232.

Aufgabe.

Es sey hr (Fig. 13.) = x und ri = y, man soll das Stück Fläche hir der Konchoide finden.

Auflösung.

Man setze hg = fg = α, cg = β, und ziehe durch k die Linie kf auf ri senkrecht, so hat man gr = gh − rh = $\alpha - x$, und cr = cg + gh − rh = $\beta + \alpha - x$. Aus beyden ähnlichen Dreyecken cir und fki ergiebt sich

cr : kf = ri : fi oder

$\beta + \alpha - x : \alpha - x = y :$ fi und

$$\text{fi} = \frac{y(\alpha - x)}{\beta + \alpha - x}$$

$$\text{fi}^2 = \frac{y^2(\alpha - x)^2}{(\beta + \alpha - x)^2}; \text{ ferner ist,}$$

$$\text{fi}^2 = \text{ik}^2 - \text{fk}^2 = \text{hg}^2 - \text{rg}^2$$

$$= \alpha^2 - (\alpha - x)^2.$$

=

$$= a^2 - 2a^2 + ax - x^2$$
$$= 2ax - x^2; \text{ folglich}$$

$$2ax - x^2 = \frac{y^2(a-x)^2}{(\beta+a-x)^2}$$

$$\frac{(2ax-x^2)(\beta+a-x)^2}{(a-x)^2} = y^2 \text{ und}$$

$$y = \sqrt{(2ax-x^2)} \cdot \frac{\beta+a-x}{a-x}$$

$$ydx = \frac{\beta+a-x}{a-x} \cdot dx\sqrt{(2ax-x^2)}$$

$$= \frac{\beta+a-x}{a-x} \cdot x^{\frac{1}{2}} dx\sqrt{(2a-x)} \text{ und}$$

$$\int ydx = \frac{\beta+a-x}{a-x} \cdot \int x^{\frac{1}{2}} dx\sqrt{(2a-x)}$$

Man hat also nur nöthig, den Ausdruck $\sqrt{(2a-x)}$ in eine unendliche Reihe zu verwandeln, und jedes Glied mit $x^{\frac{1}{2}}dx$ zu multipliziren, und sodann zu integriren; das Integral wird hernach noch mit $\frac{\beta+a-x}{a-x}$ multipliciret.

Zwölftes Kapitel.

Von der Kubatur der krummen Linien und Berechnung der daher entstandenen krummen Oberflächen der Körper.

§. 233.

Erklärung.

Es sey ade (Fig. 55.) eine krumme Linie, welche sich um die festgesetzte Axe af herumdrehet, so beschreibet selbige eine krumme Fläche, welche man eine Afterkegelfläche und den davon eingeschlossenen körperlichen Raum einen Afterkegel nennt.

§. 234.

Aufgabe.

Es ist die Gleichung der krummen Linie gegeben, man soll die krumme Oberfläche im Quadratmaasse finden, wenn sie sich um ihre Axe drehet.

Auflösung.

Erster Fall.

Mit rechtwinklichten Coordinaten.

Man nehme an, der Bogen ad (Fig. 40), wozu die Coordinaten ab = x und bd = y gehören, nehme um das unbestimmte Stück dh zu,

so

so wächst auch ab um bc = Δx und bd um gh = Δy. Durch h und d ziehe man die gerade Linie hf, und stelle sich vor, die ganze Figur drehe sich um die unbewegliche Axe fc, so werden die rechtwinklichten Dreyecke fhc, und fdb senkrechte Kegel beschreiben, wovon der Halbmesser der Grundfläche des erstern = ch, Axe fc, und der Halbmeßer der Grundfläche des andern = bd, Axe fb; das Trapezium bdhc aber wird einen abgekürzten geraden Kegel beschreiben, dessen Axe = bc ist. Die krumme Oberfläche des geraden Kegels fhc ist = π. ch. hf und die des Kegels fdb = π. db. df mithin die krumme Oberfläche des abgekürzten geraden Kegels =

π. ch. hf − π. db df =

π (ch. hf − db. df)

Es ist nun ch = cg + gh = bd + gh, und hf = dh + df, mithin

π (ch. hf − db. df) =

π ((bd + gh) (dh + df) − db. df) =

π (bd. dh + bd. df + gh. dh + gh. df − db. df)

= π (bd. dh + gh. dh + gh. df)

= π. bd. dh + π. gh. dh + π gh. df.

Ferner ist bd = y, $dh = \sqrt{(dg^2 + gh^2)}$

$= \sqrt{(\Delta x^2 + \Delta y^2)}$

und wegen der Aehnlichkeit der Dreyecke dhg und dfb

hg : hd = db : df oder

$\Delta y : \sqrt{(\Delta x^2 + \Delta y^2)} = y : df$ und

$df = \frac{y\sqrt{(\Delta x^2 + \Delta y^2)}}{\Delta y}$, mithin

π.

π. bd. dh $= \pi$. y. $\sqrt{(\Delta x^2 + \Delta y^2)}$

π. gh. dh $= \pi \Delta y \sqrt{(\Delta x^2 + \Delta y^2)}$.

$$\pi \text{. gh. df} = \frac{\pi y \Delta y \sqrt{(\Delta x^2 + \Delta y^2)}}{\Delta y}$$

$$= \pi y \sqrt{(\Delta x^2 + \Delta y^2)} \text{ und}$$

π. bd. dh $+ \pi$. gh. dh $+ \pi$. gh. df $=$

$2\pi y \sqrt{(\Delta x^2 + \Delta y^2)} + \pi \Delta y \sqrt{(\Delta x^2 + \Delta y^2)}$.

Je kleiner nun Δx folglich auch Δy wird, desto kleiner wird $\pi \Delta y \sqrt{(\Delta x^2 + \Delta y^2)}$. Verschwindet endlich Δx so ist auch $\pi \Delta y \sqrt{(\Delta x^2 + \Delta y^2)} = 0$, und es ist die Gränze $= 2\pi y \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$; diese Gränze ist aber die Fläche, welche von dem unendlich kleinen Bogen db beschrieben wird. Druckt man also die krumme Fläche, welche der Bogen ad beschreibet, durch Q aus, so ist

$$dQ = 2\pi y \sqrt{(dx^2 + dy^2)}.$$

Man suche also aus der gegebenen Gleichung dx^2 in einer Funktion von y und dy, oder dy^2 und y in einer Funktion von x und dx, so findet man dQ, wovon das Integral $= Q$ oder die krumme Oberfläche, welche von der krummen Linie beschrieben wird.

Zweyter Fall.

Mit schiefwinklichten Coordinaten.

Es sey ab (Fig. 42.) $= x$, bd $= y$, ak $= z$ und kd $= t$, so ist das krumme Flächenelement von ad $= 2\pi y \sqrt{(dz^2 + dt^2)}$. Nun ist

kd $= t = y \sin. \omega$ und

ak $= y = x + y \cos. \omega$, mithin

$dt = dy . \sin. \omega$ und

$dz = dx + dy . \cos. \omega$

$dt^2 = dy^2 \sin.\omega^2$

$dz^2 = dx^2 + 2dxdy.\cos.\omega + dy^2\cos.\omega^2$

und es wird das Element der Fläche von ad

$= 2\pi y\sqrt{(dx^2 + 2dxdy\cos.\omega + dy^2(\sin.\omega^2 + \cos.\omega^2))}$

$= 2\pi y\sqrt{(dx^2 + 2dxdy.\cos.\omega + dy^2)}.$

Sucht man also aus der gegebenen Gleichung dx in einer Funktion von y und dy oder dy und y in einer Funktion von x und dx, und substituiret selbige in vorige Formel, so wird das Integral die verlangte krumme Oberfläche angeben.

§. 235.

Zusatz.

Es sey ade (Fig. 58.) ein rechtwinklichtes Dreyeck, und dieses drehe sich um den einen Cathetus ad als um eine Axe, so wird selbiges einen geraden Kegel beschreiben, dessen Axe $=$ ad und dessen Halbmesser der Grundfläche $=$ de. Man setze ab $= x$, bc $= y$, ad $= a$ und de $= \varrho$. In beyden rechtwinklichten Dreyecken abc und ade hat man nun

$ac^2 = ab^2 + bc^2$ oder

$ac^2 = x^2 + y^2$ und

$ac = \sqrt{(x^2+y^2)}$

$ae^2 = ad^2 + de^2$ oder

$ae^2 = a^2 + \varrho^2$ und

$ae = \sqrt{(a^2+\varrho^2)}.$

Die Aehnlichkeit der Dreyecke abc und ade giebt

$ab : ad = ac : ae$ oder

$x : a = \sqrt{(x^2+y^2)} : \sqrt{(\varrho^2+a^2)}$ und

$$x\sqrt{(\varrho^2+a^2)} = a\sqrt{(x^2+y^2)}$$ folglich

$$x^2(\varrho^2+a^2) = a^2(x^2+y^2)$$ und

$$\frac{x^2(\varrho^2+a^2)}{a^2} = x^2+y^2$$

$$\frac{x^2(\varrho^2+a^2)-a^2x^2}{a^2} = y^2$$ oder

$$\frac{x^2(\varrho^2+a^2-a^2)}{a^2} = y^2$$

$$\frac{x^2(\varrho^2)}{a^2} = y^2$$ und

$$\frac{x\varrho}{a} = y$$; folglich

$$\frac{\varrho dx}{a} = dy$$ und

$$\frac{\varrho^2 dx^2}{a^2} = dy^2$$

$$\frac{\varrho^2 dx^2}{a^2} + dx^2 = dy^2 + dx^2$$

$$\frac{(\varrho^2+a^2)\,dx^2}{a^2} = dy^2+dx^2$$ und

$$\frac{dx\sqrt{(\varrho^2+a^2)}}{a} = \sqrt{(dy^2+dx^2)}$$; alſo

$$\frac{2\pi x\varrho}{a^2}\cdot dx\sqrt{(\varrho^2+a^2)} = 2\pi y\sqrt{(dx^2+dy^2)}$$

und hiervon das Integral

$$\frac{\pi x^2\varrho}{a^2}\sqrt{(\varrho^2+a^2)} + C,$$

Verschwindet aber x, so verschwindet auch die krumme Oberfläche, mithin wird auch $C = o$, und es ist das vollständige Integral

$$\frac{\pi x^2 \varrho}{a^2} V(\varrho^2 + a^2).$$

Wird $x = a$, so wird die ganze Oberfläche des geraden Kegels

$$\frac{\pi a^2 \varrho}{a^2} V(\varrho^2 + a^2) = \pi \varrho V(\varrho^2 + a^2)$$

$$= \pi \varrho . ae.$$

§. 236.

Aufgabe.

Es ist die Gleichung der Kreislinie gegeben, man sucht die krumme Oberfläche eines Kugelstücks.

Auflösung.

Aus der Gleichung der Kreislinie $y^2 = 2\varrho x - x^2$ erhält man

$y = x^{\frac{1}{2}} (2\varrho - x)^{\frac{1}{2}}$ und

$dy = (\frac{1}{2}(2\varrho - x)^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}} (2\varrho - x)^{-\frac{1}{2}})$ dx oder

$$dy = \left(\frac{V(2\varrho - x)}{2Vx} - \frac{Vx}{2V(2\varrho - x)}\right) dx \text{ oder}$$

$$dy = \frac{(2(2\varrho - x) - x)\, dx}{4V(2\varrho x - x^2)}$$

$$= \frac{2(\varrho - x)\, dx}{2V(2\varrho x - x^2)}$$

$$= \frac{(\varrho - x\, dx}{V(2\varrho x - x^2)} \text{ und}$$

$$dy^2 = \frac{(\varrho - x)^2 dx^2}{2\varrho x - x^2} \text{ und}$$

$$dy^2 + dx^2 = \frac{(\varrho - x)^2 dx^2}{2\varrho x - x^2} + dx^2$$

$$= \frac{(\varrho^2 - 2\varrho x + x^2 + 2\varrho x - x^2) dx}{2\varrho x - x^2}$$

$$= \frac{\varrho^2 dx^2}{2\varrho x - x^2} \text{ und}$$

$$\sqrt{(dy^2 + dx^2)} = \frac{\varrho dx}{\sqrt{(2\varrho x - x^2)}}, \text{ folglich}$$

$$2\pi y \sqrt{(dy^2 + dx^2)} = 2\pi . y \frac{\varrho dx}{\sqrt{(2\varrho x - x^2)}}$$

$$= 2\pi\varrho dx$$

und hiervon ist das Integral

$$2\pi\varrho x + C.$$

Wird die Fläche vom Anfange des Scheitels an gerechnet, so verschwindet sie, wenn x verschwindet, und es ist das vollständige Integral

$$2\pi\varrho x.$$

Wenn $x = 2\varrho$ angenommen wird, so erhält man für die Oberfläche der ganzen Kugel $2\pi\varrho . 2\varrho = 4\varrho^2\pi$. Der größte Kreis auf der Oberfläche der Kugel hat zu seinem Flächeninhalte $\varrho^2\pi$; demnach verhält sich die Oberfläche der Kugel zur Fläche des größten Kreises derselben $= 4\varrho^2\pi : \varrho^2\pi = 4 : 1$.

§. 237.

Zusatz.

Für einen jeden Kegelschnitt überhaupt, wo $y^2 = px \mp \frac{p}{a} . x^2$ (§. 53.) ist, hat man

$2ydy$

$2ydy = (p \mp \frac{2p}{a} x)\, dx$ und

$dy = \frac{(p \mp \frac{2p}{a} x)\, dx}{2\sqrt{(px \mp \frac{p}{a} x^2)}}$ folglich

$dy^2 = \frac{(p \mp \frac{2p}{a} x)^2 dx^2}{4(px \mp \frac{p}{a} x^2)}$ und

$dy^2 + dx^2 = \left(\frac{(p \mp \frac{2p}{a} x)^2 + 4(px \mp \frac{p}{a} x^2)}{4(px \mp \frac{p}{a} x^2)}\right) dx^2$

$= \frac{((ap \mp 2px)^2 + 4a(apx \mp px^2))\, dx^2}{4a(apx \mp px^2)}$

$\sqrt{(dy^2 + dx^2)} = dx\sqrt{\left(\frac{(ap \mp 2px)^2 + 4a(apx \mp px^2)}{4a(apx \mp px^2)}\right)}$

$2\pi y\sqrt{(dy^2 + dx^2)} = \frac{2\pi dx}{2a}\sqrt{((ap \mp 2px)^2 + 4x(apx \mp px^2))}$

$= \frac{\pi}{a} . dx\sqrt{(a^2p^2 + 4apx(a \mp p) + 4px^2(p \mp a))}$

und hiervon müßte das Integral gesucht werden.

Für die Parabel ist a unendlich groß. Die Größe hinter dem Wurzelzeichen kann also ausgedrücket werden

$$p^2 + \frac{4px(a \mp p)}{a} + \frac{4px^2(p \mp a)}{a}, \text{ folglich}$$

$$dx\sqrt{\left(p^2 + \frac{4px(a \mp p)}{a} + \frac{4px^2(p \mp a)}{a^2}\right)}$$

und wenn a unendlich groß angenommen wird

$$\pi dx\sqrt{(p^2 + 4px)}$$

wovon also das Integral genommen werden muß.

§. 238.

Erklärung.

Eine krumme Linie kubiren heißt den körperlichen Inhalt eines Körpers finden, welcher von krummen und ebenen oder ganz allein von krummen Flächen umschlossen ist.

§. 239.

Aufgabe.

Es drehe sich die krummlinichte Ebene abd (Fig. 40) um die Axe ab, man soll den körperlichen Inhalt, welcher dadurch entstehet, berechnen.

Auflösung.

Erster Fall.

Mit rechtwinklichten Coordinaten.

Der körperliche Inhalt des geraden Kegels, welchen das Dreyeck fhc beschreibet, ist $= \frac{\pi}{3} \cdot hc^3$

fc, und der des geraden Kegels, den das Dreyeck

fhe

fdb beschreibet, $= \frac{\pi}{3} . bd^2 . fb$; mithin der körperliche Inhalt des abgekürzten geraden Kegels, welcher von dem Trapezio dbch beschrieben wird,

$$= \frac{\pi}{3} . hc^2 . fc - \frac{\pi}{3} . bd^2 . fb$$

$$= \frac{\pi}{3} (hc^2 . fc - bd^2 . fb).$$

Es ist nun $hc = eg + gh = y + \Delta x$ und

$$hc^2 = (y + \Delta y)^2$$
$$= y^2 + 2y\Delta y + \Delta y^2$$
$$fc = cb + bf = \Delta x + bf;$$

ferner giebt die Aehnlichkeit der Dreyecke dgh und dfb

$$hg : gd = db : bf \text{ oder}$$
$$\Delta y : \Delta x = y : bf \text{ und}$$
$$bf = \frac{y\Delta x}{\Delta y}, \text{ mithin}$$
$$fc = \Delta x + \frac{y\Delta x}{\Delta y};$$

daher wird

$$\frac{\pi}{3} (hc^2 . fc - bd^2 . fb) =$$

$$\frac{\pi}{3} ((y^2 + 2y\Delta y + \Delta y^2)(\Delta x + \frac{y\Delta x}{\Delta y}) - y^2 . \frac{y\Delta x}{\Delta y})$$

$$= \frac{\pi}{3} (y^2\Delta x + 2y\Delta y\Delta x + \Delta y^2\Delta x + \frac{y^3\Delta x}{\Delta y} + 2y^2 \Delta x + y\Delta x\Delta y - \frac{y^2\Delta x}{\Delta y})$$

$$= \frac{\pi}{3}(3y^2\Delta x + 3y\Delta y\Delta x + \Delta y^2\Delta x)$$

$$= \pi y^2\Delta x + \pi y\Delta y\Delta x + \frac{\pi}{3}\Delta y^2\Delta x.$$

Man setze noch den von dem kleinen Abschnitt dhl beschriebenen Raum $= Q$ so ist der ganze körperlich Inhalt, welcher von der Ebene dbchk beschrie ben wird

$$= \pi y^2\Delta x + \pi y\Delta y\Delta x + \frac{\pi}{3}\Delta y^2\Delta x + Q;$$

dieser ist aber der Zuwachs des von der Ebene ad beschriebenen körperlichen Raums. Man setze die sen $= C$, so ist

$$\Delta C = \pi y^2\Delta x + \pi y\Delta y\Delta x + \frac{\pi}{3}\Delta y^2\Delta x + Q.$$

Je kleiner nun Δx folglich auch Δy wird, desto weniger ist ΔC von $\pi y^2\Delta x$ verschieden; wird Δx mithin auch Δy unendlich klein, so hat man völlig

$$dC = \pi y^2 dx.$$

Sucht man also aus der gegebenen Gleichung y in einer Funktion von x oder dx in einer Funktion von y und dy, und substituiret diese Werthe in jenen Ausdruck, so kann man integriren, und das Integral ist der körperliche Inhalt des von der Ebene beschriebenen Körpers.

Zweyter Fall.

Mit schiefwinklichten Coordinaten.

Es sey ab (Fig. 42.) $= x$, bd $= y$, ak $= z$, kd $= t$, und der von der Ebene dka beschrie-

bene körperliche Raum $= C$, so hat man vermöge des ersten Falles

$$dC = \pi t^2 dz.$$

Es ist aber $t = y. \sin. \omega$ und

$z = x + y \cos. \omega$ folglich

$t^2 = y^2 \sin. \omega^2$ und

$dz = dx + dy. \cos. \omega$, daher

$$dC = \pi. y^2 \sin. \omega^2 (dx + dy. \cos. \omega).$$

Sucht man also aus der gegebenen Gleichung dx in einer Funktion von y und dy oder dy in einer Funktion von x und dx, und setzet diese Werthe in jene Formel, so kann alsdenn integriret werden, und das Integral ist der verlangte körperliche Inhalt desjenigen Körpers, welcher durch die Umdrehung von der Ebene adk erzeuget wird. Will man aber nur den Inhalt desjenigen Körpers haben, welchen die Ebene dab beschreibet, so muß von dem Integrale noch der körperliche Inhalt eines geraden Kegels subtrahiret werden, welchen das rechtwinklichte Dreyeck bkd beschreibet. Der körperliche Inhalt hiervon ist $= \frac{\pi}{3}. kd^2. kb$

$$= \frac{\pi}{3} . y^2 \sin. \omega. y. \cos. \omega$$

$$= \frac{\pi}{3} y^3. \sin. \omega. \cos. \omega$$

$$= \frac{\pi}{6} y^3. \sin. 2\omega \text{ (§. 145).}$$

§. 240.

Zusatz.

In dem geraden Kegel (§. 235.) war

$$y^2 = \frac{x^2\varrho^2}{a^2} \text{ folglich}$$

$$\pi y^2 dx = \frac{\pi\varrho^2 x^2 dx}{a^2} \text{ und}$$

$$\int \pi y^2 dx = \frac{\pi\varrho^2 x^3}{3a^2} + C.$$

Es wird hier aber $C = o$, wenn $x = o$ und der körperliche Inhalt $= o$ ist, demnach das vollständige Integral

$$\frac{\pi\varrho^2 x^3}{3a^2}.$$

Wenn x der Höhe des ganzen Kegels gleich mithin $= a$, so wird der körperliche Inhalt des ganzen Kegels

$$= \frac{\pi\varrho^2 a^3}{3a^2} = \frac{\pi}{3}\varrho^2 a$$

wie schon aus der Elementargeometrie bekannt ist.

§. 241.

Aufgabe.

Es ist die Gleichung der Kreislinie gegeben, man soll den körperlichen Inhalt eines Kugelstücks finden.

Auflösung.

Aus der Gleichung der Kreislinie

$y^2 = 2\varrho x - x^2$ erhält man

$\pi y^2 dx = 2\pi\varrho x dx - \pi x^2 dx$, und

$$\int \pi y^2 dx = \pi\varrho x^2 - \frac{\pi}{3} x^3 + C.$$

Soll

Soll aber der Körper verschwinden, wenn x verschwindet, so ist auch C = o und es ist das Kugelstück =

$$\pi\varrho x^2 - \frac{\pi}{3}x^3.$$

§. 242.

Zusatz.

Wird $x = \varrho$, so hat man den körperlichen Inhalt der Halbkugel

$$\pi\varrho^3 - \frac{\pi}{3}\varrho^3 = \frac{2}{3}\pi\varrho^3 \text{ u. d. ganzen Kugel}$$

$$= \frac{4}{3}\pi\varrho^3$$
$$= \frac{1}{6}\pi\delta^3$$

wenn $\delta = 2\varrho$ ist. Es sey ferner δ der Durchmesser der Grundfläche und die Höhe eines geraden Cylinders, so ist der körperliche Inhalt desselben $\frac{1}{4}\pi.\delta^3$.

Demnach verhält sich die Kugel zu einem solchen Cylinder

$$= \frac{1}{6}\pi\delta^3 : \frac{1}{4}\pi\delta^3$$
$$= \frac{1}{6} : \frac{1}{4}$$
$$= 4 : 6$$
$$= 2 : 3$$

Ist ferner die Grundfläche eines geraden Kegels $= \frac{1}{4}\pi\delta^2$ und die Höhe $= \delta$ so ist der körperliche Inhalt desselben $= 1\frac{1}{2}\pi\delta^3$, mithin verhält sich auch die Kugel zu einem solchen Kegel

$$= \frac{1}{6}\pi\delta^3 : 1\frac{1}{2}\pi\delta^3$$
$$= \frac{1}{6} : 1\frac{1}{2}$$
$$= 12 : 6$$
$$= 2 : 1$$

welches alles schon aus der Elementargeometrie bekannt ist.

§. 243.

Zusatz.

Ueberhaupt ist für einen jeden Kegelschnitt, w

$$y^2 = px \mp \frac{p}{a}x^2$$

$$\pi y^2 dx = \pi px dx \mp \frac{\pi p}{a}x^2 dx \text{ und}$$

$$\int \pi y^2 dx = \frac{\pi}{2} px^2 \mp \frac{\pi p}{3a}.x^3 + C$$

$$= \frac{\pi px^2}{6a}(3a \mp 3x) + C$$

als der unbestimmte Inhalt eines jeden Sphä roids von einem Kegelschnitte.

Wenn in der Ellipse $x = \alpha$ wird, so erhäl man für das ganze elliptische Sphäroid den Inhal $\frac{\pi p \alpha^2}{6}$; wäre nun α dem Durchmesser einer Kuge gleich, so würde sich das elliptische Sphäroid zur Kugel erhalten

$$= \frac{\pi p \alpha^2}{6} : \frac{\pi \alpha^3}{6}$$

$$= p : \alpha$$

$$= \beta^2 : \alpha^2$$

wenn β die kleine Axe der Ellipse bedeutet.

Wird bey der Hyperbel $x = \alpha$, so ist der körperliche Inhalt dieses hyperbolischen Sphäroids

=

$= \frac{1}{6}\pi p\alpha^2$; für das Sphäroid der gleichseitigen Hyperbel aber $= \frac{1}{6}\pi p\alpha^2 (3\alpha + 2x)$.

In der Parabel ist α unendlich groß, mithin auch $\frac{\pi p}{3\alpha} \cdot x^3 = 0$, und es ist der körperliche Inhalt des paraboliſchen Sphäroids $= \frac{\pi}{2} px^2 = \frac{\pi}{2} \cdot xy^2$.

Hätte ein Cylinder mit dem Stücke dieſes Sphäroids einerley Durchmeſſer $= 2y$ und einerley Höhe $= x$, ſo würde der körperliche Inhalt deſſelben $= \pi xy^2$, mithin noch einmal ſo groß als das unbeſtimmte Stück des paraboliſchen Sphäroids ſeyn.

Dreyzehntes Kapitel.

Von den Logarithmen und der logarithmiſchen Linie.

§. 244.

Erklärung.

Wenn eine beſtändige Zahl α zur xten Potenz erhoben wird, ſo kann dieſe Potenz einer gegebenen Zahl y gleich werden, wie $\alpha^x = y$. Nimmt man alſo für y nach und nach immer andere Werthe an, ſo muß auch der Exponent immer andere und andere Werthe erhalten, wenn α beſtändig ſeyn ſoll, demnach iſt y eine Funktion von α^x.

Den veränderlichen Exponenten x nennt man den zur Zahl y gehörigen Logarithmen, und die beständige Zahl α die Grundzahl oder die Basis. Man pflegt den Logarithmen einer Zahl durch den lateinischen Buchstaben l auszudrucken; so bedeutet $l.y = x = l.\alpha^x$.

§. 245.

Zusatz.

Man setze $x = 1$, so wird $l.\alpha^x = l.\alpha^1 = 1$; ferner setze man $x = 0$, so wird $l.\alpha^x = \alpha^0 = l.1 = 0$ d. h. der Logarithme der Grundzahl ist allemal 1 und der Logarithme der Einheit $= 0$.

§. 246.

Erklärung.

In dem allgemeinen Ausdrucke $\alpha^x = y$ nehme man für y nach und nach die auf einander folgenden natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 u. f. an, so erhält man sodann eine Reihe zu diesen Zahlen gehörigen Logarithmen. Eine solche Reihe von Logarithmen mit den dazu gehörigen Zahlen für einerley Grundzahl nennt man ein logarithmisches System. Weil man nun eine jede Zahl für die Grundzahl annehmen kann, so sieht man leicht, daß es unzählig viele logarithmische Systeme geben könne.

§. 247.

Zusatz.

Für x setze man nach und nach die Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, 5 u. s. so schreiten die Logarithmen in einem stetigen arithmetischen, und die dazu gehörigen Zahlen in einem stetigen geometrischen Verhältnisse fort. Denn für

$x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ u. s. wird

$a^x = 1, a^1, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, a^7$ u. s.

Wäre z. E. $a = 2$, so wird für

$x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ u. s.

$a^x = 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128$, u. s.

§. 248.

Zusatz.

In einerley logarithmischen Systeme ist der Logarithme eines Produktes die Summe der Logarithmen der Faktoren, und der Logarithme eines Quotienten die Differenz der Logarithmen des Dividendi und des Divisors. Es ist demnach auch der Logarithme einer Potenz der Logarithme der Wurzel mit dem Exponenten der Potenz multiplicirt, und der Logarithme einer Wurzel der Logarithme der Potenz durch den Wurzelexponenten dividiret; es mag übrigens der Exponent eine ganze oder gebrochene Zahl seyn.

§. 249.

Erklärung.

Auf der Abscissenlinie ak (Fig. 59.) nehme man einen willkührlichen Punkt b zum Anfangspunkte

punkte der Abscissen an, und schneide auf selbiger vor- und rückwärts die gleichen Theile bd = de = eh = kh u. s. = om = oq u. s. ab; durch die Punkte b, d, e, h, k u. s. setze man sodann senkrechte Linien auf ak so auf, daß sie als Applikaten in einem stetigen geometrischen Verhältnisse fortschreiten, so kann man durch die Endpunkte dieser Applikaten eine krumme Linie hindurch führen welche die logarithmische Linie genennt wird

§. 250.

Zusatz.

Man setze bc = 1, und nehme bd = bc = de = eh u. s. so stellen die Abscissen bd, be, bh u. s. von dem Punkte b angerechnet die Logarithmen vor, welche zu den Applikaten df, eg, hi u. s. gehören, und es wird die Applikate df die Grundzahl des logarithmischen Systems seyn. Demvermöge der Erklärung schreiten die Applikaten bc, df, eg, hi u. s. in einem stetigen Verhältnisse fort und bilden daher folgende Progression

bc, df, eg, hi, hl u. s.

Setzt man also bc = 1 = bd, und df = a so gehören zu den Abscissen bd, be, bh, bk u. s. oder

0 1 2 3 4 u. s. — x

die Applikat. bc, df, eg, hi, kl u. s. — oder

$1, a, a^2, a^3, a^4$ u. s. — a^x

Es ist also $y = a$, wenn $x = 1$, $y = a^2$, wenn $x = 2$, $y = a^3$, wenn $x = 3$, und überhaupt

$$y = a^x .$$

Dies alles stimmt vollkommen mit demjenigen überein, was kurz vorher von den Logarithmen und

den

den dazu gehörigen Zahlen ist gesaget worden. Es ist hier die Einheit der Applikate bc der Einheit der Abscisse bd gleich angenommen worden; allein es wird dies nicht nothwendig erfordert, es kann die Einheit der Applikate gar sehr verschieden seyn von der Einheit der Abscisse.

§. 251.

Zusatz.

Weil vermöge der Erklärung die Applikaten auf der entgegengesetzten Seite mn, op, qr, st, vw, au u. s. ebenfalls in einem stetigen Verhältnisse fortgehen, so bilden diese folgende abnehmende geometrische Progression, wenn die dazu gehörigen Abscissen eine arithmetische abnehmende Progression bilden;

Applikaten mn, op, qr, 1t, vw u. s. —— y

Abscissen bm, —bo, —bq, —bf, —bv — u. s. — x od.

Applikate $\frac{1}{a}, \frac{1}{a^2}, \frac{1}{a^3}, \frac{1}{a^4}, \frac{1}{a^5}$ u. s. — y

Abscissen —1, —2, —3, —4, —5 u. s. — x

demnach ist für $x = -1$, $y = a^{-1}$, für $x = -2$, $y = a^{-2}$, für $x = -3$, $y = a^{-3}$, u. s. und überhaupt $y = a^{-x}$, welches allemal ein ächter Bruch ist. Weil also die Abscissen auf der einen Seite unendlich wachsen, so wie auf der entgegengesetzten Seite unendlich abnehmen können, so kann auch die Abscissenlinie mit der logarithmischen Linie nie zusammenkommen, mithin ist sie die Asymptote der logarithmischen Linie.

§. 252.

Zusatz.

Wäre x ein Bruch, so bleibt beständig no $y = a^x$ oder $y = a^{-x}$, nachdem x entweder p sitiv oder negativ ist. Hieraus wird es begreiflic daß man so viele Punkte in der logarithmischen L nie bestimmen kann als man nur will.

§. 253.

Aufgabe.

Aus der gegebenen Gleichung der logarithm schen Linie die Subtangente derselben zu finden.

Auflösung.

Weil bey einer jeden krummen Linie, mith auch bey der logarithmischen Linie die Subta gente

$$= y\frac{dx}{dy} \text{ ist,}$$

so muß die Gleichung für die logarithmische Lin $y = a^x$ differenziiret werden. Nach den gemein Regeln der Differenzialrechnung läßt sich hier ab das Differenzial nicht finden; daher sey für de Punkt c der logarithmischen Linie (Fig. 60.), c dle Tangente, $pb = x$ die Abscisse und $bc = y$ di dazu gehörige Applikate, so ist ba die Subtan gente. Nimmt nun die Abscisse pb um $be = \Delta$ $= cg$ zu, so wächst auch die Applikate y um $gf =$ Δy. Durch die beyden Punkte f und c ziehe man die gerade Linie fd, welche der Abscissenlinie pn in

d begegnet. Die beyden Dreyecke fcg und cdb sind einander ähnlich, und man hat

$$fg : cb = cg : cd$$

vermöge der Erklärung der logarithmischen Linie ist

$$cb = a^x, \text{ mithin}$$

$$ef = a^{x+\Delta x} \text{ und}$$

$$ef - cb = fg = a^{x+\Delta x} - x$$

$$= a^x (a^{\Delta x} - 1)$$

$$= \Delta (a^x).$$

Demnach erhält man folgende Proportion

$$\Delta (a^x) : a^x = \Delta x : cd \text{ oder}$$

$$a^x (a^{\Delta x} - 1) : a^x = \Delta x : cd \text{ od.}$$

$$a^{\Delta x} - 1 : 1 = \Delta x : cd, \text{ mithin}$$

$$cd = \frac{\Delta x}{a^{\Delta x} - 1}.$$

Es sey ferner für den Punkt h der logarithmischen Linie hk die Tangente, $pi = x'$ die Abscisse und $ih = y'$ die dazu gehörige Applikate. Bedeutet ferner der Zuwachs der Abscisse $= in = be = \Delta x = ho$, so ist der Zuwachs der Applikate $= om = \Delta y'$. Man hat demnach

$$ih = a^{x'} \text{ und}$$

$$nm = a^{x'+\Delta x} \text{ und}$$

$$om = nm - ih = \Delta y' = \Delta (a^{x'})$$

$$= a^{x'+\Delta x} - a^{x'}$$

$$= a^{x'} (a^{\Delta x} - 1).$$

Zieht man durch die beyden Punkte m und h die gerade Linie ml, welche die Abscissenlinie in l schnei-

det, so ist das Dreyeck hmo dem Dreyecke bl ähnlich, und es ergiebt sich

$$mo : hi = oh : il \text{ oder}$$

$$a^{x'}(a^{\Delta x} - 1) : a^{x'} = \Delta x : il \text{ oder}$$

$$a^{\Delta x} - 1 : 1 = \Delta x : il \text{ mithin}$$

$$il = \frac{\Delta x}{a^{\Delta x} - 1}.$$

Wenn demnach der Zuwachs zu einer jeden Abscisse gleich groß bleibet, so ist il = bd. Weil man nun diesen Zuwachs so klein als man will annehmen kann, so folgt daraus, daß auch die Gränze gleich bleiben muß; für bd ist aber die Gränze ba und für il die Gränze ik, mithin auch ba = ik. Dieser Beweis gilt für einen jeden Punkt in der logarithmischen Linie, und daher ist die Subtangente in einer logarithmischen Linie eine beständige Größe, welche aber freylich von dem Werthe der Grundzahl a abhängt, welche in der Gleichung $a^x = y$ enthalten ist. Setzt man also diese beständige Größe = k, so hat man

$$y\frac{dx}{dy} = k.$$

Man nennt auch diese beständige Größe den Model oder die beständige Zahl.

§. 254.

Lehrsatz.

Die Logarithmen ein und der nemlichen Zahlen in zweyen verschiedenen Systemen haben einerley Verhältniß zu einander.

Beweis.

Für die Basis α des einen Systems sey

$\alpha^x = y$ und

$\alpha^u = z$, so hat man

$\alpha^{xu} = y^u = z^x$ und

$y = z^{\frac{x}{u}}$

Für die Basis β des andern Systems sey

$\beta^\varrho = y$ und

$\beta^\omega = z$, so ist auch

$\beta^{\varrho\omega} = y^\omega = z^\varrho$, und daher

$y = z^{\frac{\varrho}{\omega}}$;

Es war, aber auch $x = z^{\frac{x}{u}}$, demnach

$z^{\frac{\varrho}{\omega}} = z^{\frac{x}{u}}$ und

$\frac{\varrho}{\omega} = \frac{x}{u}$ oder

$\varrho : \omega = x : u$.

§. 255.

Zusatz.

Es sey $\alpha^x = y$ und $\alpha^{x+\Delta x} = y + \Delta y$, so hat man $l.y = x$ und $l.(y+\Delta y) = x+\Delta x$. Fer-

ner sey $\beta^{\varrho} = y$ und $\beta^{\varrho+\Delta\varrho} = y+\Delta y$, so ist auch $l\, y = \varrho$ und $l.(y+\Delta y) = \varrho+\Delta\varrho$. Hieraus folgt also

$$x : \varrho = x+\Delta x : \varrho+\Delta\varrho \text{ oder}$$
$$\Delta x : \Delta\varrho = x+\Delta x : \varrho+\Delta\varrho.$$

In dem ersten Systeme ist nun

$$\Delta y : y = \Delta x : m \quad (\S.\ 253.)$$

und im zweyten

$$\Delta y : y = \Delta\varrho : n, \text{ folglich}$$
$$\Delta x : m = \Delta\varrho : n \text{ oder}$$
$$\Delta x : \Delta\varrho = m : n, \text{ und daher auch}$$
$$x+\Delta x : \varrho+\Delta\varrho = m : n \text{ oder}$$
$$\frac{x+\Delta x}{\varrho+\Delta\varrho} = \frac{m}{n}.$$

Verschwindet Δx und $\Delta\varrho$, so werden m und n die Subtangenten in beyden verschiedenen Systemen; diese setze man k und h, so ist

$$\frac{x}{\varrho} = \frac{k}{h} \text{ oder}$$
$$x : \varrho = k : h \text{ d. h.}$$

die Logarithmen ein und der nemlichen Zahl in zweyen verschiedenen Systemen verhalten sich zu einander, wie die Subtangenten.

§. 256.

Erklärung.

Dasjenige System, in welchem die Subtangente $= 1$ gesetzet wird, nennt man das natürliche System, und die dazu gehörigen Logarithmen die natürlichen oder hyperbolischen Logarithmen. Diese letzte Benennung haben sie daher

her erhalten, weil sie zugleich die Quadratur der Hyperbel zwischen ihren Asymptoten geben. Um sich nun nicht in den folgenden zu verwirren, drucke man den natürlichen Logarithmen einer Zahl durch den lateinischen Buchstaben l., einen jeden andern aber durch den deutschen Buchstaben L. aus.

§. 257.

Aufgabe.

Das Differenzial von $a^x = y$ zu finden.

Auflösung.

In einem jeden Systeme ist die Subtangente eine beständige Größe; diese setze man k. Weil nun bey einer jeden krummen Linie mithin auch in der logarithmischen Linie die Subtangente $= y \cdot \frac{dx}{dy}$ so hat man

$$y \cdot \frac{dx}{dy} = k, \text{ mithin}$$

$$ydx = kdy.$$

Hieraus findet man

1. $dx = \frac{k \cdot dy}{y}$ oder

weil $l.y = x$

$d.l.y = \frac{k \cdot dy}{y}$

2. $dy = \frac{ydx}{k}$ oder

weil $y = a^x$ und

$dy = d(a^x)$

$d(a^x) = \frac{a^x\,dx}{k}$.

§. 258.

Zusatz.

In dem natürlichen Systeme ist $k = 1$; setzt man also die Basis des natürlichen Systems $= e$, so erhält man

$d.l.y = \frac{dv}{y}$ und

$d(e^x) = e^x\,dx$.

§. 259.

Aufgabe.

Den natürlichen Logarithmen von der Zahl $(1+x)$ zu finden.

Auflösung.

Es ist $l.(1+x) = x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} - \frac{x^7}{7}$ u. s.

Beweis.

Es ist $d.l.(1+x) = \frac{d(1+x)}{1+x}$

=

$$= \frac{dx}{1+x}$$

$$= \frac{1}{1+x} \cdot dx.$$

Verwandelt man nun den Bruch $\frac{1}{1+x}$ in eine unendliche Reihe, so ergiebt sich

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x - x^2 - x^3 - x^4 - x^5 - x^6 - \text{u. s. mithin}$$

$$\frac{1}{1+x} \cdot dx = dx - xdx - x^2dx - x^3dx - x^4dx - x^5dx - x^6dx - \text{u. s.}$$

und hiervon das Integral

$$\int \frac{dx}{1+x} = x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} - \frac{x^7}{7} - \text{u. s.}$$

§. 260.

Zusatz.

Man nehme x negativ an, und setze in vorige Reihe allenthalben $-x$, so erhält man

$$l.(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} - \frac{x^7}{7} - \text{u. s.}$$

und diese Reihe von l. (1+x) subtrahiret

$$l.(1+x)-l.(1-x)=2x+\frac{2x^3}{3}+\frac{2x^5}{5}+\frac{2x^7}{7}+\frac{2x^9}{9}+\text{u. f.}$$

Es ist aber $l.(1+x)-l.(1-x)=l.\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$; folglich wird

$$l.\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\frac{x^9}{9}+\text{u.f.}\right)$$

§. 261.

Zusatz.

Es sey $q=\frac{1+x}{1-x}$, so hat man

$(1-x)q=1+x$ oder

$q-xq=1+x$ und

$q-1=xq+x=(q+1)x$, mithin

$x=\frac{q-1}{q+1}$.

Setzt man also in die Reihe des vorigen §. allenthalben statt x den gleichen Werth $\frac{q-1}{q+1}$, so ergiebt sich

$$l.q=2\left(\frac{q-1}{q+1}+\frac{(q-1)^3}{3(q+1)^3}+\frac{(q-1)^5}{5(q+1)^5}+\frac{(q-1)^7}{7(q+1)^7}+\frac{(q-1)^9}{9(q+1)^9}+\text{u. f.}\right).$$

Diese

Diese Reihe ist vorzüglich geschickt, den natürlichen Logarithmen einer jeden Zahl zu finden.

Es sey z. E. $q = 2$, so findet man

$$l.2 = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} + \frac{1}{7.3^7} + \frac{1}{9.3^9} + \frac{1}{11.3^{11}} + \text{u. f.}\right).$$

Ist $q = 3$, so wird

$$l.q = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3.2^3} + \frac{1}{5.2^5} + \frac{1}{7.2^7} + \frac{1}{9.2^9} + \frac{1}{11.2^{11}} + \text{u. f.}\right)$$

Man hat also

$l.2 = 0{,}693147180559945309934 = l.2$
$l.3 = 1{,}098612288668109691128 = l.3$
$l.4 = 1{,}386294361119890618680 = 2l.2$
$l.5 = 1{,}609437912434100574420 = l.5$
$l.6 = 1{,}791759469228055000620 = l.2 + l.3$
$l.7 = 1{,}945910137170744311488 = l.7$
$l.8 = 2{,}079441541679835928020 = 3l.2$
$l.9 = 2{,}197224577336219382560 = 2l.3$
$l.10 = 2{,}302585092994045684376 = l.2 + l.5.$

§. 262.

Aufgabe.

Die Subtangente eines jeden Systems zu finden.

Auflösung.

Es sey a die Grundzahl und m die Subtangente des Systems so hat man

$l.a$

$$l.\alpha : L.\alpha = 1 : m \text{ oder}$$

weil $L.a = 1$

$$l.\alpha : 1 = 1 : m, \text{ mithin}$$

$$m = \frac{1}{l.\alpha}.$$

Wenn man also den natürlichen Logbrithmen der Grundzahl des Systems in die Einheit dividiret, so findet man die Subtangente des Systems.

Es sey $\alpha = 10$, mithin die Basis des gemeinen Logarithmensystems, so ist

$$m = \frac{1}{2,302585092994} = 0,434294481903251$$

oder der Model des gemeinen Logarithmensystems.

§. 263.

Zusatz.

Es sey y eine jede Zahl in einem logarithmischen Systeme, und L. y der dazu gehörige Logarithme, so wie l. y der natürliche Logarithme eben dieser Zahl, so ist

$$1 : m = l.y : L.y, \text{ folglich}$$

$$L.y = m.\ l.\ y \text{ d. h.}$$

Wenn der Model eines jeden Systems mit dem natürlichen Logarithmen einer jeden Zahl multipliciret wird, so erhält man den Logarithmen dieses Systems. Soll man z. E. den Logarithmen von 2 im gemeinen Systeme suchen, so hat man

$$L.2 = 0,434294481903251 - - - - \times$$
$$0,693147180559945 - -$$
$$= 0,301029995$$

§. 264.

Aufgabe.

Es ist ein Logarithmen gegebe, man soll die dazu gehörige Zahl suchen.

Auflösung.

Es sey in dem Systeme, wo m der Model ist $y = \mathfrak{L}.(1+x)$, so hat man

$$\mathfrak{L}.(1+x) = y = m\left(x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} - \frac{x^7}{7} - \text{u. f.}\right)$$

mithin auch

$$\frac{y}{m} = x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} - \frac{x^7}{7} - \text{u. f.}$$

Nun setze man $x = Ay + By^2 + Cy^3 + Dy^4 + Ey^5 + Fy^6 + Gy^7 + \text{u. f.}$

so ergiebt sich $x^2 = A^2y^2 + 2ABy^3 +$

$$\left.\begin{matrix} 2AC \\ B^2 \end{matrix}\right\} y^4 + \left\{\begin{matrix} 2AD \\ +2BC \end{matrix}\right\} y^5 + \left\{\begin{matrix} 2AE \\ +2BD \\ +C^2 \end{matrix}\right\} y^6 + \left\{\begin{matrix} 2AF \\ +2BE \\ +2CD \end{matrix}\right\} y^7 + \text{u. f.}$$

$$x^3 = A^3y^3 + 3A^2By^4 + \left\{\begin{matrix} 3A^2C \\ +3AB^2 \end{matrix}\right\} y^5 + \left\{\begin{matrix} 3A^2D \\ +6ABC \\ +B^3 \end{matrix}\right\} y^6 +$$

$$\left.\begin{matrix} 3A^2E \\ 6ABD \\ 3AC^2 \\ 3B^2C \end{matrix}\right\} y^7 + \text{u. f.}$$

$$x^4 = A^4y^4 + 4A^3By^5 + 4A^3C \left.\begin{matrix} \\ + 6A^2B^2 \end{matrix}\right\} y^6 + 4A^3D \left.\begin{matrix} \\ + 12A^2BC \\ + 4AB^3 \end{matrix}\right\} y^7$$

$$x^5 = A^5y^6 + 5A^4y^6 + 5A^4C \left.\begin{matrix} \\ + 10A^3B^2 \end{matrix}\right\} y^7$$

$$x^6 = A^6y^6 + 6A^5y^6$$

$$x^7 = A^7y^7 \text{ u. f.}$$

Setzt man diese Werthe der Potenze von x in die Reihe $\frac{y}{m}$, so zieht man daraus für

$$A = \frac{1}{m}$$

$$B = \frac{1}{2m^2}$$

$$C = \frac{1}{6m^3}$$

$$D = \frac{1}{24m^4}$$

$$E = \frac{1}{120m^5}$$

$$F = \frac{1}{720m^6}$$

$$G = \frac{1}{5040m^7} \text{ u. f. und es wird}$$

$$x = \frac{y}{m} + \frac{y^2}{2m^2} + \frac{y^3}{6m^3} + \frac{y^4}{24m^4} + \frac{y^5}{120m^5} + \frac{y^6}{720m^6} + \frac{y^7}{5040.m^7} + \text{u. f.}$$

oder

$$x=\frac{y}{m}+\frac{y^2}{2.m^2}+\frac{y^3}{2.3m^3}+\frac{y^4}{2.3.4m^4}+\frac{y^5}{2.3.4.5m^5}$$
$$+\frac{y^6}{2.3.4.5.6m^6}+\frac{y^7}{2.3.4.5.6.7m^7}+\text{u. f. mit-}$$

hin auch

$$x+1=1+\frac{y}{m}+\frac{y^2}{2.m^2}+\frac{y^3}{2.3.m^3}+\frac{y^4}{2.3.4.m^4}$$
$$+\frac{y^5}{2.3.4.5m^5}+\text{u. f.}$$

Da nun $y=\text{L.}(1+x)$, so ist $1+x$ die Zahl, welche zu den Logarithmen y gehöret.

§. 265.

Zusatz.

Im natürlichen Systeme ist $m=1$, folglich wird die Zahl, welche zu den natürlichen Logarithmen y gehöret $=$

$$1+y+\frac{y^2}{2.}+\frac{y^3}{2.3}+\frac{y^4}{2.3.4}+\frac{y^5}{2.3.4.5}+$$
$$\frac{y^5}{2.3.4.5.6}+\text{u. f.}$$

Wäre ferner $y=1$, folglich der Logarithme der Basis in dem natürlichen Systeme, so findet man die Basis $=$

$$1+1+\tfrac{1}{2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\frac{1}{2.3.4.5}+\frac{1}{2.3.4.5.6}+$$
$$=2,7181828459045235 - - -$$

diese Zahl wird gemeiniglich durch e ausgedrucket.

§. 266.

Zusatz.

Man seye $a^x = e^y$, so ist auch $xl.a = yl.e = y$, weil $l.e = 1$; demnach ist auch

$$a^x = 1 + xl.a + \frac{x^2(l.a)^2}{2} + \frac{x^3(l.a)^3}{2.3} + \frac{x^4(l.a)^4}{2.3.4} + \frac{x^5(l.a)^5}{2.3.4.5} + \text{u. f.}$$

Es läßt sich daher eine jede logarithmische Größe vermöge der im §. 264. gefundenen Reihe in eine unendliche Reihe verwandeln.

§. 267.

Aufgabe.

Zu finden, um wie viel eine Zahl zunehmen muß, wenn der dazu gehörige Logarithme um einen Theil größer wird.

Auflösung.

Es sey die Grundzahl des Systems $= a$, m der Model, und y die Zahl, wozu der Logarithme x gehöret, so hat man $a^x = y$. Es werde nun $y + \Delta y$ aus y, wenn $x + \Delta x$ aus x wird, so ist $a^{x+\Delta x} = y + \Delta y$ und

$$(a^{x+\Delta x} - a^x) = \Delta y = a^x (a^{\Delta x} - 1).$$

Nun ist

$$a^{\Delta x} = 1 + \frac{\Delta x\, l.a}{m} + \frac{\Delta x^2 (l.a)^2}{2.m^2} + \frac{\Delta x^3 (l.a)^3}{2.3.m^3} + \frac{\Delta x^4 (l.a)^4}{2.3.4.m^4} + \text{u. f. also}$$

$a^{\Delta x}$

$$a^{\Delta x} - 1 = \frac{\Delta x . \mathfrak{L} . a}{m} + \frac{\Delta x^2 (\mathfrak{L} . a)^2}{2 . m^2} + \frac{\Delta x^3 (\mathfrak{L} a)^3}{2 . 3 . m^3}$$
$$+ \frac{\Delta x^4 (\mathfrak{L} . a)^4}{2 . 3 . 4 . m^4} + \text{u. f.}$$

und

$$a^x (a^{\Delta x} - 1) = \Delta y = y \left(\frac{\Delta x \mathfrak{L} . a}{m} + \frac{\Delta x^2 (\mathfrak{L} . a)^2}{2 . m^2} \right.$$
$$\left. + \frac{\Delta x^3 (\mathfrak{L} . a)^3}{2 . 3 m^3} + \text{u. f.} \right).$$

Ist a die Basis des gemeinen Logarithmensystems mithin $\mathfrak{L} . a = be = 1$, so wird

$$\Delta y = y \left(\Delta x + \frac{\Delta x^2}{2.} + \frac{\Delta x^3}{2.3} + \frac{\Delta x^4}{2.3.4} + \frac{\Delta x^5}{2.3.4.5} + \text{u. f.} \right)$$

§. 268.

Aufgabe.

Zu finden, um wie viel ein Logarithme zunehmen muß, wenn die dazu gehörige Zahl um einen Theil zunimmt.

Auflösung.

Man setze $x = \mathfrak{L} . y$. Wird nun $x + \Delta x$ aus x, wenn $\mathfrak{L} . (y + \Delta y)$ aus $\mathfrak{L} y$ wird, so hat man

$x + \Delta x = \mathfrak{L} . (y + \Delta y)$ und

$x + \Delta x - x = \mathfrak{L} . (y + \Delta y) - \mathfrak{L} y . = \Delta x$ oder

$$\Delta x = \mathfrak{L} . \left(\frac{y + \Delta y}{y} \right) = \mathfrak{L} . \left(1 + \frac{\Delta y}{y} \right) =$$

$$\frac{m \Delta y}{y} - \frac{m \Delta y^2}{2 y^2} + \frac{m \Delta y^3}{3 y^3} - \frac{m \Delta y^4}{4 y^4} \text{ u. f.}$$

und im natürlichen Systeme

$$\Delta x = \frac{\Delta y}{y} - \frac{\Delta y^2}{2y^2} + \frac{\Delta y^3}{3y^3} - \frac{\Delta y^4}{4 \cdot y^4} \text{ u. f.}$$

§. 269.

Aufgabe.

Die Tangente, Normale und Subnormale einer logarithmischen Linie zu finden.

Auflösung.

Die Tangente für eine jede krumme Linie, mithin auch für die logarithmische ist

$$= y \sqrt{(1 + \frac{dx^2}{dy^2})}.$$

In der logarithmischen Linie aber ist

$$y \frac{dx}{dy} = k$$

wenn k den Model des logarithmischen Systems bedeutet. Demnach hat man

$$\frac{dx}{dy} = \frac{k}{y} \text{ und}$$

$$\frac{dx^2}{dy^2} = \frac{k^2}{y^2}, \text{ also}$$

$$\text{Subtangente} = y \sqrt{(1 + \frac{k^2}{y^2})}$$

$$= y \sqrt{(\frac{y^2 + k^2}{y^2})}$$

$$= \sqrt{(y^2 + k^2)}:$$

In dem natürlichen Logarithmensysteme ist $k = 1$, mithin ist

die Subtangente $= \sqrt{(y^2+1)}$.

Die Normallinie für jede krumme, folglich auch für die logarithmische Linie ist

$$= y \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Weil nun in der logarithmischen Linie

$\frac{dx}{dy} = \frac{k}{y}$ und

$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{k}$, so hat man

die Normallinie $= \frac{y^2}{k}$.

Für das natürliche System ist also die Normallinie $= y^2$.

Die Subnormale einer krummen Linie ist

$$y\sqrt{(1+\frac{dy^2}{dx^2})}.$$

In der logarithmischen Linie aber hat man

$\frac{dy^2}{dx^2} = \frac{y^2}{k^2}$, folglich

die Subnormale $= y\sqrt{(1+\frac{y^2}{k^2})}$

$$= y\sqrt{(\frac{k^2+y^2}{k^2})}$$

$$= \frac{y}{k}\sqrt{(k^2+y^2)}.$$

Im natürlichen Systeme ist demnach

die Subnormale $= y\sqrt{(1+y^2)}$.

§. 270.

Aufgabe.

Logarithmische Differenzialfunktionen zu integriren.

Auflösung.

Weil $d.l.y = \frac{k.dy}{y}$, so hat man auch

$$l.y = f.\frac{k.dy}{y}.$$

In dem natürlichen Systeme ist $k = 1$, mithin

$$l.y = f.\frac{dy}{y}.$$

Ferner ist $d(a^x) = \frac{a^x dx}{k}$, und daher

$$a^x = f.\frac{a^x dx}{k}$$

$$= \frac{1}{k}.f.a^x dx \text{ und}$$

$$ka^x = f.a^x dx.$$

In dem natürlichen Systeme ist demnach

$$a^x = f.a^x dx.$$

§. 271.

Aufgabe.

Den Halbmesser der Krümmung einer logarithmischen Linie zu finden.

Auflösung.

Wenn der Halbmesser der Krümmung $= \varrho$ bedeutet, so hat man für jede krumme Linie, mithin auch für die logarithmische

$$\varrho = -\frac{dx^2}{d^2y}\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

wenn dx als beständig betrachtet worden. In der logarithmischen Linie hat man

$$y.\frac{dx}{dy} = k, \text{ mithin}$$

$$y.dx = dyk.$$

Ist nun dx beständig, so findet man ferner

$$dydx = kd^2y.$$

Aus $y.\frac{dx}{dy} = k$ findet man ferner

$$dy = \frac{ydx}{k} \text{ und}$$

$$dxdy = \frac{ydx^2}{k}, \text{ folglich}$$

$$kd^2y = \frac{ydx^2}{k} \text{ und}$$

$$k^2d^2y = ydx^2$$

$$\frac{k^2}{y} = \frac{dx^2}{d^2y} \text{ und}$$

$$-\frac{k^2}{y} = -\frac{dx^2}{d^2y}.$$

Weiter hat man

$$\frac{dy^2}{dx^2} = \frac{y^2}{k^2}; \text{ also wird}$$

$$\varrho = -\frac{k^2}{y}\left(1+\frac{y^2}{k^2}\right)^{\frac{3}{2}}$$
$$= -\frac{k^2}{y}\left(\frac{k^2+y^2}{k^2}\right)^{\frac{3}{2}}$$
$$= -\frac{k^2}{y}\cdot\left(\frac{k^2+y^2}{k^3}\right)^{\frac{3}{2}}$$
$$= -\frac{(k^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}{yk}.$$

Dieser negative Ausdruck zeigt, daß die logarithmische Linie gegen ihre Axe erhaben ist.

§. 272.

Aufgabe.

Die logarithmische Linie zu rektificiren.

Auflösung.

Aus der Gleichung der logarithmischen Linie suche man den Werth von

$$\sqrt{(dx^2+dy^2)}.$$

Das Integral davon wird die Länge der logarithmischen Linie angeben, welche entweder x oder y bestimmt. In der logarithmischen Linie hat man nun

$$dx = \frac{k\,dy}{y}, \text{ mithin}$$
$$dx^2 = \frac{k^2 dy^2}{y^2} \text{ und}$$
$$dx^2+dy^2 = \frac{k^2 dy^2}{y^2} + dy^2$$

$$= \frac{k^2 + y^2}{y^2} \cdot dy^2$$

$$\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{dy\sqrt{(k^2 + y^2)}}{y} \text{ und}$$

$$\int \sqrt{(dx + dy^2)} = \int \frac{dy}{y} \sqrt{(k^2 + y^2)}$$

Man muß also $\sqrt{(y^2 + k^2)}$ in eine unendliche Reihe verwandeln und jedes Glied mit $\frac{dy}{y}$ multipliciren und hierauf integriren. Im natürlichen Systeme ist

$$\int \sqrt{(dy^2 + dx^2)} = \int \frac{dy}{y} \sqrt{(1 + y^2)}.$$

§. 273.

Aufgabe.

Die logarithmische Linie quadriren.

Auflösung.

Aus der gegebenen Gleichung der logarithmischen Linie suche man den Werth von ydx. In der logarithmischen Linie hat man nun

$ydx = kdy$, demnach ist

$\int ydx = ky + C$.

Soll die Fläche da den Anfang nehmen, wo $x = o$, mithin $y = 1$, so wird

$o = k + C$ und

$C = -k$ folglich das vollständige Integral

$ky - k = k(y - 1)$.

Soll aber die Fläche von einer unendlichen Entfernung angehen, wo also $y = o$ angenommen

werden kann, so wird auch $C = o$, und der Flächeninhalt $= ky$.

§. 274.

Aufgabe.

Es drehet sich die logarithmische Linie um die unbewegliche Axe, man soll die daher entstandene krumme Oberfläche berechnen.

Auflösung.

Aus der Gleichung der logarithmischen Linie suche man den Werth von

$$2\pi y \sqrt{(dx^2 + dy^2)}.$$

Das Integral davon wird die verlangte Oberfläche bestimmen. In der logarithmischen Linie war

$$\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{dy}{y}\sqrt{(k^2 + y^2)}, \text{ mithin}$$

$$2\pi y\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = 2\pi dy\sqrt{(k^2 + y^2)} \text{ und}$$

$$\int 2\pi y\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = 2\pi \int dy\sqrt{(k^2 + y^2)} + C.$$

Es muß also $\sqrt{(k^2 + y^2)}$ in eine unendliche Reihe verwandelt, jedes Glied mit $2\pi dy$ multiplicirt und hierauf integriret werden.

§. 275.

Aufgabe.

Die logarithmische Linie kubiren.

Auflösung.

Man suche aus der Gleichung der logarithmischen Linie

$$\pi y^2 dx$$

und

und integrire alsdenn. Es ist in der logarithmischen Linie,

$dx = \frac{kdy}{y}$, mithin

$\pi y^2 dx = k\pi y dy$ und

$\int \pi y^2 dx = \frac{1}{2}\pi y^2 k + C$.

Soll der körperliche Inhalt von $x = o$ und $y = 1$ angerechnet werden, so wird

$o = \frac{1}{2}\pi k + C$ und

$C = -\frac{1}{2}\pi k$ folglich das vollständige Integral

$\frac{1}{2}\pi y^2 k - \frac{1}{2}\pi k = \frac{1}{2}\pi (y^2 - 1) k$.

Soll aber der körperliche Inhalt von einer unendlichen Entfernung angerechnet werden, wo $y = o$ anzunehmen ist, so ist auch $C = o$, und es ist der körperliche Inhalt

$\frac{1}{2}\pi y^2 k$.

§. 276.

Zusatz.

Es sey der Durchmesser der Grundfläche eines geraden Cylinders $= y$, und seine Höhe $= 2k$, so ist der körperliche Inhalt desselben

$= \frac{1}{4}\pi y^2 . 2k = \frac{1}{2}\pi y^2 k$

mithin eben so groß als der körperliche Raum einer logarithmischen Linie, wenn man selbige von da anrechnet, wo $y = o$ ist.

Vierzehntes Kapitel.

Von den trigonometrischen Differenzialen und Integralen und von der Berechnung der trigonometrischen Linien.

§. 277.

Aufgabe.

Das Differenzial des Sinus eines Kreisbogens zu finden.

Auflösung.

Es sey bga (Fig. 61.) ein Quadrant, und ag ein beliebiger Kreisbogen = z. Dieser Kreisbogen nehme um gf = Δz zu. Aus g lasse man gk senkrecht auf ca herab und ziehe gd mit ac parallel. Auf den Endpunkt g des Halbmessers cg setze man eg senkrecht auf, und ziehe durch f die Linie fi mit gk parallel, diese wird eg in dem Punkte e und dg in h schneiden. Nun ist für den Bogen ga = z die Linie gk = hi der Sinus, ck = dg der Cosinus und hf der Zuwachs des Sinus gk, folglich gk = hi = sin. z; ck = dg = cos z und hf = Δsin. z. Wegen der Aehnlichkeit beyder Dreyecke ehg und gdc erhält man

dg : gc = eh : eg oder

cosin. z : 1 = eh : eg

wenn der Halbmesser gc = 1 gesetzet wird. Je kleiner nun der Bogen gf angenommen wird, desto

mehr

mehr nähert sich die gerade ge dem Bogen gf und he der geraden fh. In dem verschwindenden Zustande ist demnach

cosin. z : 1 = d. sin. z : dz, und
d. sin. z = dz. cos. z.

§. 278.
Zusatz.

Man drucke den Kreisbogen, wozu der Sinus gehöret, durch A. aus, und nehme sin. z = x, so ist alsdenn z = A. sin. x oder z der Kreisbogen, dessen Sinus x ist.

§. 279.
Aufgabe.

Das Differenzial des Bogens z, wozu der Sinus x gehöret, durch eine Differenzialfunktion des Sinus x zu finden.

Auflösung.

Wenn sin. z = x, und z = A. sin. x, mithin d. sin. z = dx, und dz = d. A. sin. x. Es ist nun d. sin. z = dz. cos. z oder

dx = dz. cos. z, demnach

$$dz = \frac{dx}{\cos.z} = \frac{dx}{\sqrt{(1-\sin.x^2)}}.$$

§. 280.
Aufgabe.

Das Differenzial des Cosinus eines Kreisbogens zu finden.

Auf-

Auflösung.

Wenn der Bogen ag = z um das unbestimmte Stück gf = Δz zunimmt, so nimmt der Sinus gk um hf = Δsin. z zu, der Cosinus kc aber um ki = — Δcos. z ab. Nun hat man

gh : ge = dc : cg oder

— Δ.cos.z : ge = sin. z : 1.

Je kleiner nun der Bogen gf angenommen wird, desto mehr nähert sich die gerade eg dem Bogen fg, und in dem verschwindenden Zustande hat man

— d.cos. z : dz = sin. z : 1, mithin ist

dz. cos. z = — d. cos. z oder

d. cos. z = — dz. sin. z.

§. 281.

Aufgabe.

Das Differenzial des Kreisbogens in einer Differenzialfunktion des Cosinus zu finden.

Auflösung.

Man nehme cos. z = x, so ist z = A. cos. x, und d. cos. z = dx und dz = d. A. cos. x. Nun ist d. cos. z = — dz. sin. z oder

$$dx = -dz\sqrt{(1-\cos.z^2)}$$

$$= -dz\sqrt{(1-x^2)} \text{ und}$$

$$dz = -\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}.$$

§. 282.

Aufgabe.

Das Differenzial der Tangente eines Kreisbogens zu finden.

Auflösung.

Es ist $\text{tang. } z = \frac{\text{sin. } z}{\text{cos. } z}$, mithin

$$\text{d. tang. } z = \frac{\text{cos. } z \cdot \text{d sin. } z - \text{sin-z. d. cos. } z}{\text{cos. } z^2}$$

Nun ist $\text{d. sin. } z = dz \cdot \text{cos. } z$ und

$\text{d. cos. } z = - dz \cdot \text{sin. } z$ mithin

$$\text{d. tang. } z = \frac{dz \cdot \text{cos. } z^2 + dz \cdot \text{sin. } z^2}{\text{cos. } z^2}$$

ferner ist $\text{cos. } z^2 = 1 - \text{sin. } z^2$, also auch

$$\text{d. tang. } z = \frac{dz(1 - \text{sin. } z^2) + dz \cdot \text{sin. } z^2}{\text{cos. } z^2}$$

$$= \frac{dz - dz \text{ sin. } z^2 + dz \cdot \text{sin. } z}{\text{cos. } z^2}$$

$$= \frac{dz}{\text{cos. } z^2}.$$

§. 283.

Aufgabe.

Das Differenzial des Kreisbogens in einer Differenzialfunktion der Tangente zu finden.

Auflösung.

Man setze tang. $z = x$, so ist $z = A.\ tang.\ x$, folglich d. tang. $z = dx$ und $dz = d.\ A.\ tang.\ x$. Nun ist

$$d.\ tang.\ z = \frac{dz}{cos.\ z^2} = dx \text{ und}$$

$$dz = dx.\ cos.\ z^2.$$

Ferner ist $tang.\ z = \frac{sin.\ z}{cos.\ z} = \frac{\sqrt{(1 - cosin.\ z^2)}}{cos.\ z}$ und

$$tang.\ z.\ cos.\ z = \sqrt{(1 - cos.\ z^2)}$$
$$tang.\ z^2\ cos.\ z^2 = 1 - cos.\ z^2$$
$$(tang.\ z^2 + 1)\ cos.\ z^2 = 1 \text{ und}$$
$$cos.\ z^2 = \frac{1}{tang.\ z^2 + 1}$$
$$= \frac{1}{x^2 + 1}$$

folglich wird $dz = \frac{dx}{x^2 + 1}$.

§. 284.

Aufgabe.

Das Differenzial der Cotangente eines Kreisbogens zu finden.

Auflösung.

Es ist $cotang.\ z = \frac{cos.\ z}{sin.\ z}$, mithin

$$d.\ cotang.\ z = \frac{si.\ z.\ d.cos.z - cos.z.d.si.z}{sin.\ z^2}$$

$$= -$$

$$= \frac{-dz.\ \sin.z^2 - dz.\cos z^2}{\sin.z^2}$$

Ferner ist $\sin.z^2 = 1 - \cos z^2$, demnach

$$d.\cot.z = \frac{-dz + dz.\cos.z^2 - dz.\cos.z^2}{\sin.z^2}$$

$$= -\frac{dz}{\sin.z^2}.$$

§. 285.

Aufgabe.

Das Differenzial des Kreisbogens durch eine Differenzialfunktion der Cotangente zu finden.

Auflösung.

Es sey $\text{cotang.}\,z = x$, so ist $z = A.\cot.x$ und $d.\cot.z = dx$ und $dz = d.A.\cot.x$. Nun ist $d.\cot.z = -\frac{dz}{\sin.z^2} = dx$, folglich

$$dz = -dx.\sin.z^2.$$

Ferner ist $\cot.z = \frac{\cos.z}{\sin.z} = \frac{\sqrt{(1-\sin.z^2)}}{\sin.z}$ und

$\cot.z.\sin.z = \sqrt{(1-\sin.z^2)}$ und

$\cot.z^2.\sin.z^2 = 1 - \sin.z^2$ oder

$(\cot.z^2+1)\sin.z^2 = 1$, also

$$\sin.z^2 = \frac{1}{\cot.z^2+1} = \frac{1}{x^2+1}$$

Demnach wird $dz = -\frac{dx}{x^2+1}$.

§. 286.

Aufgabe.

Das Differenzial der Sekante eines Kreisbogens zu finden.

Auflösung.

Es ist $\text{sec. } z = \frac{1}{\text{cos. } z}$ und

$$\text{d. sec. } z = \frac{-\text{d. cos. } z}{\text{cos. } z^2} = \frac{\text{dz. sin. } z}{\text{cos. } z^2}.$$

§. 287.

Aufgabe.

Das Differenzial des Kreisbogens in einer Differenzialfunktion der Sekante zu finden.

Auflösung.

Es sey $\text{sec. } z = x$, so ist $z = \text{A. sec. } x$, mithin $\text{d. sec. } z = dx$ und $dz = \text{d. A. sec. } x$. Nun hat man $\text{d. sec. } z = \frac{\text{dz. sin. } z}{\text{cos. } z^2}$, folglich

$$dz = \frac{dx \cdot \text{cos. } z^2}{\text{sin. } z}.$$

Weiter ist $\text{sec. } z = \frac{1}{\text{cos. } z} = x$ und

$$x \cdot \text{cos. } z = 1 \text{ und } \text{cos. } z = \frac{1}{x}$$

$$\text{cos. } z^2 = \frac{1}{x^2}.$$

Ferner ist auch $\text{sec. } z = \frac{1}{\sqrt{(1-\text{sin.}z^2)}} = x$, und

$x\sqrt{(1-\text{sin.}z^2)} = 1$ und

$x^2(1-\text{sin.}z^2) = 1$ und

$\text{sin.}z^2 = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}$ und

$\text{sin.}z = \frac{\sqrt{(x^2-1)}}{x}$, mithin

$dz = \frac{dx}{x^2} : \frac{\sqrt{(x^2-1)}}{x}$

$= \frac{dx}{x\sqrt{(x^2-1)}}$.

§. 288.

Aufgabe.

Das Differenzial der Cosekante eines Kreisbogens zu finden.

Auflösung.

Es ist $\text{cosec. } z = \frac{1}{\text{sin. } z}$, folglich

$\text{d. cosec. } z = \frac{-\text{d. sin. } z}{\text{sin.}z^2} = -\frac{dz.\text{ cos. } z}{\text{sin. } z^2}$

§. 289.

Aufgabe.

Das Differenzial eines Kreisbogens durch eine Differenzialfunktion der Cosekante zu finden.

Auflösung.

Es sey cosec. $z = x$, so hat man $z = A.$ cosec. x, mithin d. cosec. $z = dx$ und $dz = d.A.$ cosec. x. Weil nun

$$d.\,\text{cosec.}\,z = -\frac{dz.\,\text{cos.}\,z}{\text{sin.}\,z^2} = dx$$ ist, so wird

$$dz = -\frac{dx.\,\text{sin.}\,z^2}{\text{cos.}\,z}.$$

Aus $\text{cosec.}\,z = \frac{1}{\text{sin.}\,z} = x$ erhält man

$1 = x.\,\text{sin.}\,z$ und

$\frac{1}{x} = \text{sin.}\,z$ und $\frac{1}{x^2} = \text{sin.}\,z^2$

Ferner ist auch $x = \frac{1}{\sqrt{(1 - \text{cos}\,z^2)}}$ und

$x\sqrt{(1 - \text{cos.}\,z^2)} = 1$

$x^2\ (1 - \text{cos.}\,z^2) = 1$

$\text{cos.}\,z^2 = 1 - \frac{1}{x^2}$ und

$\text{cos.}\,z = \sqrt{(1 - \frac{1}{x^2})} = \frac{\sqrt{(x^2 - 1)}}{x}$

demnach wird

$$dz = -\frac{dx}{x^2} : \frac{\sqrt{(x^2 - 1)}}{x}$$

$$= -\frac{dx}{x\sqrt{(x^2 - 1)}}.$$

§. 290.

Aufgabe.

Das Differenzial des Sinus verſus eines Kreisbogens zu finden.

Auflöſung.

Es iſt $\text{ſin. v. } z = 1 - \text{cof. } z$, folglich

$\text{d. ſin. v. } z = -\text{d. cof. } z = dz \text{. ſin. } z$.

§. 291.

Aufgabe.

Das Differenzial eines Kreisbogens in einer Differenzialfunktion des Sinus verſus zu finden.

Auflöſung.

Es ſey $\text{ſin. v. } z = x$, ſo iſt $z = A. \text{ ſin. v. } x$, und $\text{d. ſin. v. } z = dx$ und $dz = \text{d. } A. \text{ ſin. v. } x$. Nun hat man $\text{d. ſin. v. } z = dz \text{. ſin. } z = dx$, alſo wird

$$dz = \frac{dx}{\text{ſin. } z}.$$

Aus $\text{ſin. v. } z = 1 - \text{cof. } z$ erhält man

$\text{ſin. v. } z = 1 - \sqrt{(1 - \text{ſin. } z^2)} = x$, folglich

$1 - x = \sqrt{(1 - \text{ſin. } z^2)}$ und

$1 - 2x + x^2 = 1 - \text{ſin. } z^2$ und

$\text{ſin. } z^2 = 2x - x^2$ und

$\text{ſin. } z = \sqrt{(2x - x^2)}$; demnach wird

$$dz = \frac{dx}{\sqrt{(2x - x^2)}}.$$

§. 292.

Aufgabe.

Das Differenzial des Cosinus versus eines Kreisbogens zu finden.

Auflösung.

Aus cos. v. $z = 1 - \sin. z$ erhält man

d. cos. v. $z = -$ d. sin. $z = -$ dz. cos. z.

§. 293.

Aufgabe.

Das Differenzial des Kreisbogens durch eine Differenzialfunktion des Cosinus versus zu finden.

Auflösung.

Man nehme cos. v. $z = x$, so ist $z =$ A. cos. v. x und d. cos. v. $z =$ dx und dz = d. A. cos. v. x. Es ist nun

d. cos. v. $z = -$ dz. cos. $z =$ dx, also wird

$$dz = -\frac{dx}{\cos. z}.$$

Aus cos. v. $z = x = 1 - \sin. z$ ergiebt sich

$x = 1 - \sqrt{(1 - \cos. z^2)}$ und

$1 - x = \sqrt{(1 - \cos. z^2)}$

$1 - 2x + x^2 = 1 - \cos. z^2$ und

$\cos. z^2 = 2x - x^2$ und

$\cos. z = \sqrt{(2x - x^2)}$, daher wird

$$dz = -\frac{dx}{\sqrt{(2x - x^2)}}.$$

§. 294.

Zusatz.

Es ist also

1. $d.\sin.z = dz.\cos.z$
2. $d.\cos.z = -dz.\sin.z$
3. $d.\text{tang}.z = \frac{dz}{\cos.z^2}$
4. $d.\text{cota}.z = \frac{dz}{\sin.z^2}$
5. $d.\sec.z = \frac{dz.\sin.z}{\cos.z^2}$
6. $d.\text{cosec}.z = -\frac{dz.\cos.z}{\sin.z^2}$
7. $d.\sin.v.z = dz.\sin.z$
8. $d.\cos.v.z = -dz.\cos.z$
9. $d.\mathfrak{A}.\sin.x = \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$
10. $d.\mathfrak{A}.\cos.x = -\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$
11. $d.\mathfrak{A}.\text{tang}.x = \frac{dx}{x^2+1}$
12. $d.\mathfrak{A}.\text{cota}.x = -\frac{dx}{x^2+1}$
13. $d.\mathfrak{A}.\sec.x = \frac{dx}{x\sqrt{(x^2-1)}}$
14. $d.\mathfrak{A}.\text{cosec}.x = -\frac{dx}{x\sqrt{(x^2-1)}}$

15. $d.\mathfrak{A}.\sin.v.x = \frac{dx}{\sqrt{(2x-x^2)}}$

16. $d.\mathfrak{A}.\cos.v.x = -\frac{dx}{\sqrt{(2x-x^2)}}$

§. 295.

Aufgabe.

Die trigonometrischen Integrale zu finden.

Auflösung.

Man kehre alle die im vorigen §. angegebenen Differenzialen um, so erhält man die Integrale. Es ist nemlich

1. $\int dz.\cos.z = \sin.z+C = -\cos.v.z+C$

2. $\int dz.\sin.z = -\cos.z+C = \sin.v.z+C$

3. $\int \frac{dz}{\cos.z^2} = \tang.z+C$

4. $\int \frac{dz}{\sin.z^2} = -\cota.z+C$

5. $\int \frac{dz.\sin.z}{\cos.z^2} = \seca.z+C$

6. $\int \frac{dz.\cos z}{\sin z^2} = -\cosec.z+C$

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \mathfrak{A}.\sin x+C = -\mathfrak{A}.\cos.x+C$

8. $\int \frac{dx}{x^2+1} = \mathfrak{A}.\tang.x+C = -\mathfrak{A}.\cota.x+C$

9. $\int \frac{dx}{x\sqrt{(x^2-1)}} = \mathfrak{A}.\text{sec}.x+C = -\mathfrak{A}.\text{cos}.x+C$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{(2x-x^2)}} = \mathfrak{A}.\text{sin.v}.x+C = -\mathfrak{A}.\text{cos.v}.x+C.$

§. 296.

Zusatz.

Wäre das Differenzial $\frac{dx}{\sqrt{(\varrho^2-x^2)}}$ gegeben, so brauchte man nur Zähler und Nenner durch ϱ zu dividiren, und man würde erhalten

$$\frac{\frac{dx}{\varrho}}{\sqrt{\left(\frac{\varrho^2-x^2}{\varrho}\right)}} = \frac{\frac{d\left(\frac{x}{\varrho}\right)}{\varrho}}{\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{\varrho^2}\right)}};$$

hievon wäre also das Integral =

$$\mathfrak{A}.\text{sin}.\frac{x}{\varrho}+C \text{ (§. 293. n. 7)} = -\mathfrak{A}.\text{cos}.\frac{x}{\varrho}+C.$$

Wäre ferner das Differenzial $\frac{dx}{x^2+\varrho^2}$ gegeben, so würde man wie vorhin erhalten

$$\frac{\frac{dx}{\varrho^2}}{\frac{x^2+\varrho^2}{\varrho^2}} = \frac{\frac{1}{\varrho}d\left(\frac{x}{\varrho}\right)}{\frac{x^2}{\varrho^2}+1}, \text{ und hievon wäre das Integral}$$

$$\frac{1}{\varrho} \text{ A. tang. } \frac{x}{\varrho} + C = -\frac{1}{\varrho} \text{ A. cot. } \frac{x}{\varrho} + C$$

(§. 295. n. 8.).

Ist ferner die Differenzialfunktion $\frac{dx}{x\sqrt{(x^2-\varrho^2)}}$

$$\frac{\frac{dx}{\varrho^2}}{\frac{x\sqrt{(x^2-\varrho^2)}}{\varrho^2}} = \frac{\frac{1}{\varrho}.d\left(\frac{x}{\varrho}\right)}{\frac{x}{\varrho}\sqrt{\left(\frac{x^2}{\varrho^2}-1\right)}}$$

und hiervon ist das Integral

$$\frac{1}{\varrho} \text{ A. sec. } \frac{x}{\varrho} + C = \frac{1}{\varrho} \text{ A. cos. } \frac{x}{\varrho} + C$$

(§. 295 n. 9.).

Ist endlich die Differenzialfunktion $\frac{dx}{\sqrt{(\varrho x - x^2)}}$

gegeben, so hat man

$$\frac{\frac{2dx}{\varrho}}{\frac{2\sqrt{(\varrho x-x^2)}}{\varrho}} = \frac{\frac{d\left(\frac{2x}{\varrho}\right)}{\varrho}}{\frac{\sqrt{(4\varrho x-4x)}}{\varrho}}$$

$$= \frac{d\left(\frac{2x}{\varrho}\right)}{\sqrt{\left(2.\frac{2x}{\varrho}-\frac{(2x)^2}{\varrho^2}\right)}}.$$

und hiervon ist das Integral

$$\text{A. sin. v. } \frac{2x}{\varrho} + C = -\text{A. cos. v. } \frac{2x}{\varrho} + C$$

(§. 295. n. 10.).

§. 298.

§. 297.

Aufgabe.

Den Kreisbogen in einer unendlichen Funktion des Sinus zu finden.

Auflösung.

Man hat

$$\text{d. A. sin. } x = \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}, \text{ folglich}$$

$$\text{f. d. A. sin. } x = \text{f.} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}.$$

Verwandelt man daher $\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$ in eine unend. liche Reihe, und multipliciret ein jedes Glied mit dx und integriret, so wird das Integral die verlangte Funktion seyn. Es ist

$$\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{2.4} + \frac{3.5.x^6}{2.4.6} + \frac{3.5.7.x^8}{2.4.6.8} + \frac{3.5.7.9.x^{10}}{2.4.6.8.10} + \text{u. f. also}$$

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = dx + \frac{x^2dx}{2} + \frac{3x^4dx}{2.4} + \frac{3.5.x^6dx}{2.4.6} + \frac{3.5.7.x^8dx}{2.4.6.8} + \frac{3.5.7.9.x^{10}dx}{2.4.6.8.10} + \text{u. f. und}$$

$$\text{f.} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = x + \frac{x^3}{2.3} + \frac{3.x^5}{2.4.5} + \frac{3.5.x^7}{2.4.6.7} + \frac{3.5.7.x^9}{2.4.6.8.9} + \frac{.5.7.9.x^{11}}{2.4.6.8.10.11} + \text{u. f.} + C.$$

Wenn aber $x = 0$, so ist A. sin. $x = 0$, folglich auch $C = 0$, und es ist das vollständige Integral

$$x + \frac{x^3}{2.3} + \frac{3.x^5}{2.4.5} + \frac{3.5.x^7}{2.4.6.7} + \frac{3.5.7.x^9}{2.4.6.8.9} + \frac{3.5.7.9.x^{11}}{2.4.6.8.10.11} + \text{u. f.}$$

§. 298.

Aufgabe.

Aus dem gegebenen Bogen den Sinus desselben zu finden.

Auflösung.

Man setze A. sin. $x = z$, so wird

$$z = x + \frac{x^3}{2.3} + \frac{3x^5}{2.4.5} + \frac{3.5.x^7}{2.4.6.7} + \frac{3.5.7.x^9}{2.4.6.8.9} + \frac{3.5.7.9.x^{11}}{2.4.6.8.10.11} + \text{u. f.}$$

Wird diese Reihe umgekehret, so erhält man den Sinus in einer unendlichen Funktion des Kreisbogens z. Zu dem Ende nehme man

$$x = Az + Bz^3 + Cz^5 + Dz^7 + Ez^9 + \text{u. f.}$$

suche die Potenzen von x^3, x^5 u. f. und setze selbige in jene Reihe; man erhält

$$x^3 = A^3z^3 + 3A^2Bz^5 + \left.\begin{matrix} 3A^2C \\ +3AB^2 \end{matrix}\right\} z^7 + \left.\begin{matrix} 3A^2D \\ +6ACB \\ B^2 \end{matrix}\right\} z^9 + \text{u. f.}$$

$$x^5 = A^5z^5 + 5A^4Bz^7 + \left.\begin{matrix} 10A^3B^2 \\ 5A^4C \end{matrix}\right\} z^9 + \text{u. f.}$$

$$x^7 = A^7z^7 + 7A^6Bz^9 + \text{u. f.}$$

$$x^9 = A^9z^9 + \text{u. f. mithin}$$

+

$$\left.\begin{array}{l} z \\ +oz^3 \\ +oz^5 \\ +oz^7 \\ +oz^9 \\ +u.f. \end{array}\right\} \begin{array}{l} Az \\ +(B+\frac{A^3}{6})z^3 \\ +(C+\frac{3}{6}A^2B+\frac{3}{40}A^5)z^7 \\ =+(D+\frac{3}{6}A^2C+\frac{3}{6}AB^2+\frac{15}{40}A^4B+\frac{15}{336}A^7)z^7 \\ +(E+\frac{3}{6}A^2D+ABC+\frac{3}{6}C^3+\frac{30}{40}A^3+B^2+\frac{15}{40}A^4C+\frac{105}{336}A^6B+\frac{105}{1728}A^9)z^9+u.f. \end{array}$$

Hieraus erhält man folgende Gleichungen

$A=1$ und $A=1$

$B+\frac{A}{6}=o$ $\quad -B=-\frac{1}{6}$

$C+\frac{3}{6}A^2B+\frac{3}{40}A^5= \quad -C=\frac{1}{120}$

$D+\frac{3}{6}A^2C+\frac{3}{6}AB^2+\frac{15}{40}A^4+\frac{15}{336}A^7$ und

$D=-\frac{1}{5040}$

$E+\frac{3}{6}A^2D+ABC+\frac{3}{6}B^3+\frac{30}{40}A^3B^2$

$+\frac{15}{40}A^4C+\frac{105}{336}A^6B+\frac{105}{1728}A^9=o$ und E

$=\frac{1}{362880}$ u. f.

Demnach wird

$x=$ oder sin. $z=z-\frac{1}{6}z^3+\frac{1}{120}z^5-\frac{1}{5040}z^7$

$+\frac{1}{362880}z^9-$ u. f. oder

sin. z

$$\sin.z = z - \frac{1}{2.3} z^3 + \frac{1}{2.3.4.5} z^5 - \frac{1}{2.3.4.5.6.7}$$
$$z^7 + \frac{1}{2.3.4.5.6.7.8.9} z^9 - \text{u. f.}$$

Sucht man also den Bogen z in Theilen des Halbmessers, so kann man durch diese Reihe den Sinus des Bogens z finden.

§. 299.

Aufgabe.

Den Kreisbogen in einer unendlichen Funktion des Cosinus zu finden.

Auflösung.

Es ist d. A. $\cos. x = -\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$, folglich

$$\text{f. d. A. } \cos. x = A. \cos. x = -\text{f.} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$$

oder

$$A \cos. x = -x - \frac{x^3}{2.3} - \frac{3x^5}{2.4.5} - \frac{3.5.x^7}{2.4.6.7} -$$
$$\frac{3.5.7.x^9}{2.4.6.8.9} - \text{u. f.} + C.$$

Wird $x = 0$, so wird alsdenn A. cos. x dem Quadranten gleich. Setzt man also den Halbmesser des Kreises $= 1$, und die halbe Peripherie $= \pi$, so ist der Quadrante $= \frac{1}{2}\pi$. In diesem Falle wird also

$\frac{1}{2}\pi = -0 - 0$ u. f. $+ C$ und
$\frac{1}{2}\pi = C$; demnach

$$\text{A. cos. } x = \tfrac{1}{2}\pi - x - \frac{x^3}{2.3} - \frac{3x^5}{2.4.5} - \frac{3.5.x^7}{2.4.6.7} + \text{u. f. oder}$$

$$\text{A. cos. } x = \tfrac{1}{2}\pi - (x + \frac{x^3}{2.3} + \frac{3x^5}{2.4.5} + \frac{3.5.x^7}{2.4.6.7} + \text{u. f.}) \text{ oder}$$

$$\text{A. cos. } x = \tfrac{1}{2}\pi - \text{A. sin. } x.$$

§. 300.

Aufgabe.

Aus dem gegebenen Kreisbogen den Cosinus zu finden.

Auflösung.

Weil $\cos. z = \sqrt{(1 - \sin. z^2)}$ ist, so setze man $\sqrt{(1 - \sin. z^2)} = A + Bz^2 + Cz^4 + Dz^6 + E^8 + \text{u. f.}$ quadrire auf beyden Seiten, und setze statt $\sin. z^2$ das Quadrat der im §. 298. gefundenen Reihe und vergleiche auf beyden Seiten die Coefficienten. Man hat nemlich

$$1 - \sin. z^2 = A^2 + 2ABz^2 + \left.\begin{matrix} 2AC \\ B^2 \end{matrix}\right\} z^4 + \left.\begin{matrix} 2AD \\ +2BC \end{matrix}\right\} z^6 + \left.\begin{matrix} 2AE \\ 2BD \\ C^2 \end{matrix}\right\} z^8 + \text{u. f. und}$$

$$1 - z^2 + \tfrac{1}{3}z^4 - \frac{2}{45} z^6 + \frac{1}{315} z^8 - \text{u. f.} =$$

$$A^2 + 2ABz^2 + \left.\begin{matrix} 2AC \\ B^2 \end{matrix}\right\} z^4 + \left.\begin{matrix} 2AD \\ +2BC \end{matrix}\right\} z^6 + \left.\begin{matrix} 2AE \\ 2BD \\ C^2 \end{matrix}\right\} z^8$$

$$+ \text{u. f.}$$

Hier-

Hieraus zieht man folgende Gleichungen

$A^2 = 1$ und $A = 1$

$2AB = -1$ und $B = -\frac{1}{2}$

$2AC + B^2 = \frac{1}{3}$ und $C = \frac{1}{24}$

$2AD + 2BC = -\frac{2}{45}$ und $D = -\frac{1}{720}$

$2AE + 2BD + C^2 = \frac{1}{315}$ und $E = \frac{1}{40320}$

u. f.

Demnach ist

$$\text{cof. } z = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} - \frac{z^6}{720} + \frac{z^8}{40320} - \text{u. f.}$$

oder

$$\text{cof. } z = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{2.3.4} - \frac{z^6}{2.3.4.5.6} + \frac{z^8}{2.3.4.5.6.7.8} - \text{u. f.}$$

§. 301.

Aufgabe.

Den Kreisbogen in einer unendlichen Funktion der Tangente zu finden.

Auflösung.

$$\text{Es ist d. A. tang. } x = \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2} \cdot dx.$$

Verwandelt man also den Bruch $\frac{1}{1+x^2}$ in eine unendliche Reihe, multipliciret jedes Glied mit dx und integriret sodann, so wird das Integral die verlangte Funktion geben. Man findet

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10} + x^{12} -$$

u. f. also dx

$$\frac{dx}{1+x^2} = dx - x^2dx + x^4dx - x^6dx + x^8dx - x^{10}dx + x^{12}dx - \text{u. f. und}$$

$$\text{f.}\frac{dx}{1+x^2} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^{11}}{11} + \frac{x^{13}}{13} - \text{u f.} + C.$$

Wenn aber $x = 0$ wird, so wird auch A. tang. $x = 0$, mithin auch $C = 0$.

§. 302.

Zusatz.

Beträgt der Bogen, wozu die Tangente x gehöret, $= 45°$, so ist $x = 1$ mithin wird der achte Theil der Peripherie des Kreises $= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13}$ u. f. Hieraus könnte man also die ganze Peripherie des Kreises, und das Verhältniß des Durchmessers zur Peripherie finden.

§. 303.

Zusatz.

Es sey das Verhältniß des Durchmessers zur Peripherie $= 1 : p$, so wird $2p$ die Peripherie eines Kreises, dessen Durchmesser $= 2$ ist, folglich der achte Theil der Peripherie $= \frac{2p}{8} = \frac{1}{4}p =$

$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11}$ u. f. und $p = 4(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} +$ u. f.). Wäre also der Durchmesser eines Kreises $= 1$, und seine Peripherie

pherie = p, so würde der Flächeninhalt desselben $= \frac{1}{4}p = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11}$ + u. f. seyn. So ließe sich also die Quadratur des Kreises finden, wie Leibnitz zuerst gezeigt hat; allein die Reihe nähert sich zu wenig, um die Peripherie des Kreises auf viel Decimalstellen genau zu finden; deswegen ist sie nicht bequem zu gebrauchen.

§. 304.

Aufgabe.

Aus dem gegebenen Kreisbogen die Tangente zu finden.

Auflösung.

Es sey der gegebene Kreisbogen = z, so ist

$$dz = \frac{dx}{1+x^2}, \text{ folglich}$$

$$dz + x^2 dz = dx \text{ und}$$

$$x^2 = \frac{dx}{dz} - 1.$$

Nun setze man

$$x = z + Az^3 + Bz^5 + Cz^7 + Dz^9 + Ez^{11} + \text{u. f.}$$

$$x^2 = z^2 + 2Az^4 + \left.\begin{matrix}2B\\A^2\end{matrix}\right\} z^6 + \left.\begin{matrix}2C\\2AB\end{matrix}\right\} z^8 + \left.\begin{matrix}2D\\2AC\\B^2\end{matrix}\right\} z^{10}$$

$$+ \left.\begin{matrix}2E\\2AD\\2BC\end{matrix}\right\} z^{12} + \text{u. f.}$$

$$dx = dz + 3Az^2 dz + 5Bz^4 dz + 7Cz^6 dz + 9Dz^8 dz + 11Ez^{10} dz \text{ u. f.}$$

dx

$$\frac{dx}{dz} - 1 = 3Az^2 + 5Bz^4 + 7Cz^6 + Dz^8 +$$

$$11Ez^{10} \text{ u. f. mithin}$$

$$z^2 + \left.\begin{matrix} 2Az^4 \\ +A^2 \end{matrix}\right\} + \left.\begin{matrix} 2B \\ 2AB \end{matrix}\right\} z^6 + \left.\begin{matrix} 2C \\ 2AC \\ B^2 \end{matrix}\right\} z^8 + \left.\begin{matrix} 2D \\ 2AD \\ 2BC \end{matrix}\right\} z^{10} +$$

$$\left.\begin{matrix} 2E \\ 2AD \\ 2BC \end{matrix}\right\} z^{12} + \text{u. f.}$$

$$= 3Az^2 + 5Bz^4 + 7Cz^6 + 9Dz^8 + 11Ez^{10} + \text{u. f.}$$

Hieraus findet man

$3A = 1$ und $A = \frac{1}{3}$

$5B = 2A$ und $B = \frac{2}{3.5} = \frac{2}{15}$

$7C = 2B + A^2$ und $C = \frac{17}{5.7.9} = \frac{17}{315}$

$9D = 2C + 2AB$ und $D = \frac{62}{5.7.9.9} = \frac{62}{2835}$

$11E = 2D + 2AC + B^2$ und $E = \frac{1382}{5.5.7.9.9.11} =$

$\frac{1382}{155925}$ u. f.

Es wird also

$$\text{tang. } z = z + \tfrac{1}{3}z^3 + \frac{2}{15}z^5 + \frac{17}{315}z^7 +$$

$$\frac{62}{2835}z^9 + \frac{1382}{155925}z^{11} + \text{u. f.}$$

§. 305.

Aufgabe.

Den Kreisbogen in einer unendlichen Funktion der Cotangente zu finden.

Auflösung.

Es ist d. A. cota. $x = -\frac{dx}{1+x^2}$, mithin

$$A.\cot. x = -\int \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= -x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} - \frac{x^9}{9} + \frac{x^{11}}{11}$$

$$- u. f. + C.$$

Wird $x = o$, so wird alsdenn A. cot. x dem Quadranten gleich. Setzt man also die halbe Peripherie $= \pi$ für den Halbmesser $= 1$, so wird

$\frac{1}{2}\pi = -o + o - o + o - u. + C$ und

$\frac{1}{2}\pi = C$ folglich

$$A.\cot. x = \tfrac{1}{2}\pi - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} - \frac{x^9}{9} + \frac{x^{11}}{11} - u. f. \text{ oder}$$

$$A.\cot. x = \tfrac{1}{2}\pi - (x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} - \frac{x^9}{9} + \frac{x^{11}}{11} - u. f.) \text{ und}$$

$$A.\cot. x = \tfrac{1}{2}\pi - A. tang. x.$$

§. 306.

Aufgabe.

Aus dem gegebenen Kreisbogen die Cotangente zu finden.

Auflösung.

Wenn der gegebene Kreisbogen $= z$ ist, so hat man

$$\cot. z = \frac{\text{cos. } z}{\text{sin. } z} = \frac{1}{\text{tang. } z},$$

Weil nun $\text{tang. } z = z + \frac{1}{3} z^3 + \frac{2}{15} z^5 + \frac{17}{315} z^7 + \frac{62}{2835} z^9 +$ u. f. so wird

$$\cot. z = \frac{1}{z + \frac{1}{3} z^3 + \frac{2}{15} z^5 + \frac{17}{315} z^7 + \frac{62}{2805} z^3 + \text{u. f.}}$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{3} z^2 - \frac{1}{45} z^3 - \frac{2}{945} z^4 - \frac{1}{4725} z^5 - \text{u. f.}$$

§. 307.

Aufgabe.

Den Kreisbogen durch eine unendliche Funktion des Sinus versus zu finden.

Auflösung.

$$\text{Es ist d. A. sin. } x = \frac{dx}{\sqrt{(2x - x^2)}} = \frac{dx}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{(2-x)}}.$$

Man verwandele also den Ausdruck $\frac{1}{\sqrt{(2-x)}}$ in eine unendliche Reihe, multiplicire ein jedes Glied mit $\frac{dx}{\sqrt{x}}$, und integrire, das Integral ist die verlangte Funktion. Demnach setze man

$$\frac{1}{\sqrt{(2-x)}} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{u. s. f.}$$

so ist

$$\frac{1}{2-x} = A^2 + 2ABx + \left.\begin{matrix} 2AC \\ B^2 \end{matrix}\right\} x^2 + \left.\begin{matrix} 2AD \\ +2BC \end{matrix}\right\} x^3 + \left.\begin{matrix} 2AE \\ +2BD \\ +C \end{matrix}\right\} x^4 + \text{u. f. und}$$

$$1 = 2A^2 + \left.\begin{matrix} 4AB \\ -A^2 \end{matrix}\right\} x + \left.\begin{matrix} 4AC \\ +2B^2 \\ -2AB \end{matrix}\right\} x^2 + \left.\begin{matrix} +4AD \\ +4BC \\ -2AC \\ -B^2 \end{matrix}\right\} x^3 + \left.\begin{matrix} +4AE \\ +4BD \\ +C^2 \\ -2AD \\ -2BC \end{matrix}\right\} x^4 \text{ u. f.}$$

Hier-

Hieraus zieht man

$2A^2 = 1$ und $A = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$4AB - A^2 = 0$ und $B = \frac{\sqrt{2}}{8}$

$4AC + 2B^2 - 2AB = 0$ und $C = \frac{3\sqrt{2}}{64}$

$4AD + 4BC - 2AC - B^2 = 0$ und $D = \frac{5\sqrt{2}}{4.64}$

$4AE + 4BD + C^2 - 2AD - 2BC = 0$ $E = \frac{119\sqrt{2}}{4.4.8.64}$

folglich u. f.

$$\frac{1}{\sqrt{(2-x)}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{8}.x + \frac{3\sqrt{2}}{64}.x^2 + \frac{5\sqrt{2}}{4.64}.x^3 + \frac{119\sqrt{2}}{4.4.8.64}.x^4 - \text{u. f. und}$$

$$\frac{dx}{\sqrt{(2x-x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{1}}x^{\frac{1}{2}}dx + \frac{\sqrt{2}}{8}.x^{\frac{1}{2}}dx + \frac{3\sqrt{2}}{64}.x^{\frac{3}{2}}dx + \frac{5\sqrt{2}}{4.64}.x^{\frac{5}{2}}dx + \frac{119\sqrt{2}}{4.4.8.64}.x^{\frac{7}{2}}dx + \text{u. f und}$$

$$\text{f.}\frac{dx}{\sqrt{(2x-x^2)}} = \sqrt{2x} + \frac{x\sqrt{2x}}{12} + \frac{3x^2\sqrt{2x}}{5.32} + \frac{5x^3\sqrt{2x}}{2.7.64} + \frac{119x^4\sqrt{2x}}{2.4.8.9.64} \text{ u. f.} + C$$

$$= \sqrt{2x}\left(1 + \frac{x}{12} + \frac{3x^2}{5.32} + \frac{5x^3}{2.7.64} + \frac{119x^4}{2.4.8.9.64} + \text{u. f.}\right) + C.$$

So bald nun x verschwindet, so verschwindet auch der dazu gehörige Bogen, mithin wird $C = o$.

§. 308.

Aufgabe.

Aus dem gegebenen Kreisbogen den Sinus versus zu finden.

Auflösung.

Es sey der gegebene Kreisbogen $= z$, und man setze

$$x = Az^2 + Bz^4 + Cz^6 + Dz^8 + Ez^{10} + \text{u.f.und}$$

$$dx = 2Azdz + 4Bz^3dz + 6Cz^5dz + 8Dz^7dz + 10Ez^9dz + \text{u. f. und}$$

$$\frac{dx}{dz} = 2Az + 4Bz^3 + 6Cz^5 + 8Dz^7 + 10Ez^9 + \text{u. f.}$$

und wenn man dz beständig setzt

$$\frac{d^2x}{dz^2} = 2A + 4.3Bz^2 + 6.5Cz^4 + 8.7Dz^6 + 10.9Ez^8 + \text{u. f.}$$

Aus $dz = \frac{dx}{\sqrt{(2x - x^2)}}$ erhält man ferner

$$dz^2 = \frac{dx^2}{2x - x^2} \text{ und}$$

$$(2x - x^2)dz^2 = dx^2 \text{ und}$$

$$\frac{dx^2}{dz^2} = 2x - x^2 \text{ folglich}$$

$$\frac{2dxd^2x}{dz^2} = 2(1 - x)dx \text{ und}$$

$$\frac{d^2x}{dz^2} = 1 - x$$

$= 1 - Az^2 - Bz^4 - Cz^6 - Dz^8$ u. f.
$= 2A + 4.3Bz^2 + 6.5Cz^4 + 8.7Dz^6 + 10.9Ez^8 +$
u. f.

Hieraus zieht man

$2A = 1$ und $A = \frac{1}{2}$

$4.3B = -A$ und $B = -\frac{1}{2.3.4}$

$6.5C = -B$ und $C = \frac{1}{2.3.4.5.6}$

$8.7D = -C$ und $D = -\frac{1}{2.3.4.5.6.7.8}$

$10.9E = -D$ und $E = \frac{1}{2.3.4.5.6.7.8.9.10}$

u. f.

Demnach wird

$$x = \tfrac{1}{2}z^2 - \frac{1}{2.3.4}z^4 + \frac{1}{2.3.4.5.6}.z^6 - \frac{1}{2.3.4.5.6.7.8}z^8 + \frac{1}{2.3.4.5.6.7.8.9.10}.z^{10} + \text{u. f.}$$

§. 309.

Aufgabe.

Aus dem gegebenen Bogen die Sekante zu finden.

Auflösung.

Es sey der gegebene Bogen $= z$, so hat man

$dz = \frac{dx}{x\sqrt{(x^2-1)}}$ und

$$dz^2 = \frac{dx^2}{x^2(x^2-1)} = \frac{dx^2}{x^4-x^2}$$

$$\frac{dx^2}{dz^2} = x^4 - x^2 \text{ und}$$

$$\frac{2dxd^2x}{dz^2} = (4x^3 - 2x)\,dx \text{ und}$$

$$\frac{d^2x}{dz^2} = 2x^3 - x$$

wenn man dz als beständig betrachtet. Nun setze man

$$x = 1 + Az^2 + Bz^4 + Cz^6 + Dz^8 + \text{u. f.}$$

also

$$x^2 = 1 + 2Az^2 + \left.\begin{matrix}2B\\A^2\end{matrix}\right\} z^4 + \left.\begin{matrix}2B\\2AB\end{matrix}\right\} z^6 + \left.\begin{matrix}2D\\2AC\\B^2\end{matrix}\right\} z^8 + \text{u. f.}$$

$$x^3 = 1 + 3Az^2 + \left.\begin{matrix}3B\\3A^2\end{matrix}\right\} z^4 + \left.\begin{matrix}3C\\6AB\\A^3\end{matrix}\right\} z^6 + \left.\begin{matrix}3D\\6AC\\3A^2B\\6B^2\end{matrix}\right\} z^8 + \text{u. f.}$$

und

$$2x^3 = 2 + 6Az^2 + \left.\begin{matrix}6B\\6A^2\end{matrix}\right\} z^4 + \left.\begin{matrix}6C\\12AB\\2A^3\end{matrix}\right\} z^6 + \left.\begin{matrix}6D\\12AC\\6A^2B\\6B^2\end{matrix}\right\} z^8 +$$

u. f.

$$2x^3 \cdot x = 1 + 5Az^2 + \left.\begin{matrix}5B\\6A\end{matrix}\right\} z^4 + \left.\begin{matrix}5C\\12AB\\2A^3\end{matrix}\right\} z^6 + \left.\begin{matrix}5D\\12AC\\6A^2B\\6B^2\end{matrix}\right\} z^8 +$$

u. f.

Ferner hat man

$$\frac{d^2x}{dz^2} = 2A + 4.3Bz^2 + 6.5Cz^4 + 8.7Dz^6 + 10.9Ez^8 + \text{u. f. folglich}$$

+1

$$1+5Az^2+5B\}z^4+5C\}\quad 5D\}$$
$$6A\}\ 12AB\}z^6+12AC\}z^8+\text{u. f.}=$$
$$2A^3\}\quad 6A^2B\}$$
$$6B^2\}$$

$$2A+4.3Bz^2+6.5Cz^4+8.7Dz^6+10.9Ez^8+$$
$$\text{u. f.}$$

Hieraus zieht man,

$2A=1$ und $A=\frac{1}{2}$

$4.3B=5A$ und $B=\frac{5}{2.3.4}$

$6.5C=5B+6A$ und $C=\frac{97}{2.3.4.5.6}$

$8.7D=5C+12AB+2A^3$ und $D=\frac{1065}{2.3.4.5.6.7.8}$

$10.9E=5D+12AC+6A^2B+6B$ $E=\frac{66617}{2.3.4.5.6.7.8.9.10}$

u. f. also wird

$$\text{sec. } z=x=1+\tfrac{1}{2}z^2+\frac{5}{2.3.4}z^4+\frac{97}{2.3.4.5.6}$$
$$z^6+\text{u. f.}$$

§. 310.

Aufgabe.

Den Sinus für einen Bogen, welcher kleiner als der Halbmesser ist, zu finden, wenn der Halbmesser = 1 gesetzet wird.

Auflösung.

Ein Kreisbogen, welcher dem Halbmesser gleich ist, faßt $57^\circ\ 17'\ 44''\ 48'''$ u. f. (§. 244.

Geometr.). Für kleinere Bogen also suche man die Länge derselben, und gebrauche alsdenn die im §. 298. gefundene Reihe.

Ex. Man sucht den Sinus von 44°, so hat man

$$180 : 44 = 3{,}14159265\,3589 : z \text{ oder}$$
$$45 : 11 = 3{,}14159265\,3589 : z \text{ und}$$
$$+ z = 0{,}767944870975 -$$
$$+ \frac{z^5}{120} = 0{,}00222571\,5046$$
$$\frac{z^9}{262880} = 0{,}000000255981$$
$$\frac{z^{13}}{6027030800} = 0{,}000000000005$$
$$+ 0{,}790170840007$$
$$\frac{z^3}{6} = 0{,}075481248286$$
$$\frac{z^7}{5040} = 0{,}000034252155$$
$$\frac{z^9}{39916800} = 0{,}000000001372$$
$$- 0{,}075515501813 \text{ also}$$
$$+ 0{,}770170840007$$
$$- 0{,}075515501813 \text{ und}$$
$$\text{sin. } 44° = 0{,}694655338194.$$

§. 311.

Zusatz.

Für den Halbmesser $= 1$ setze man die halbe Peripherie $= \pi$, so ist der Quadrante $= \frac{1}{2}\pi$ $=$

$= 1,5707963267948966 19 - -$

Es sey ferner $\frac{1}{2}\pi : z = n : m$, mithin

$z = \frac{m}{n} \cdot \frac{1}{2}\pi$, so wird

$$\text{sin. } z = \frac{m}{n} \cdot \frac{1}{2}\pi - \frac{m^3}{n^3} \cdot \frac{(\frac{1}{2}\pi)^3}{6} + \frac{m^5}{n^5} \cdot \frac{(\frac{1}{2}\pi)^5}{120} - \frac{m^7}{n^7} \cdot \frac{(\frac{1}{2}\pi)^7}{5040} + \text{u. f.}$$

$$\text{cos. } z = 1 - \frac{m^2}{n^2} \cdot \frac{(\frac{1}{2}\pi)^2}{2} + \frac{m^4}{n^4} \cdot \frac{(\frac{1}{2}\pi)^4}{24} - \frac{m^6}{n^6} \cdot \frac{(\frac{1}{2}\pi)^6}{720} + \text{u. f.}$$

oder

$$\text{sin. } z = \frac{m}{n} \cdot 1,5707963267948966 19 - -$$

$$- \frac{m^3}{n^3} \cdot 0,645964097506246253 - -$$

$$+ \frac{m^5}{n^5} \cdot 0,079692626246167045 - -$$

$$- \frac{m^7}{n^7} \cdot 0,004681754135318688 - -$$

$$+ \frac{m^9}{n^9} \cdot 0,000160441184787350 - -$$

$$- \frac{m^{11}}{z^{11}} \cdot 0,000003598843235212 - -$$

$$+ \frac{m^{13}}{n^{13}} 00,000000056921729219 - -$$

$$- \frac{m^{15}}{n^{15}} 0,000000000668803510 - -$$

+

$$+ \frac{m^{17}}{n^{17}}\ 0{,}000000000006066935 --$$

$$- \frac{m^{19}}{n^{19}}\ 0{,}000000000000043770 --$$

$$+ \frac{m^{21}}{n^{21}}\ 0{,}000000000000000257 --$$

$$- \frac{m^{23}}{n^{23}}\ 0{,}000000000000000001 - \text{u. f.}$$

und

$$\text{cof. } z = 1{,}000000000000000000 --$$

$$- \frac{m^{2}}{n^{2}}\ 1{,}233700550136169827 --$$

$$+ \frac{m^{4}}{n^{4}}\ 0{,}253669507901048013 --$$

$$- \frac{m^{6}}{n^{6}}\ 0{,}020863480763352960 --$$

$$+ \frac{m^{8}}{n^{8}}\ 0{,}000919260274839426 --$$

$$- \frac{m^{10}}{n^{10}}\ 0{,}000025202024373060 --$$

$$+ \frac{m^{12}}{n^{12}}\ 0{,}000000471087477881 --$$

$$- \frac{m^{14}}{n^{14}}\ 0{,}000000006286603083 --$$

$$+ \frac{m^{16}}{n^{16}}\ 0{,}000000000065659631 --$$

$$- \frac{m^{18}}{n^{18}}\ 0{,}000000000000529440 --$$

+

$$+ \frac{m^{26}}{n^{20}} 0{,}000000000000003437 --$$

$$- \frac{m^{22}}{n^{22}} 0{,}000000000000000018 \text{ - u. f.}$$

Da man nur nöthig hat, die Sinus und Cosinus der Winkel bis auf 45° zu wissen, so bleibt der Bruch $\frac{m}{n}$ allemal kleiner, als $\frac{1}{2}$, mithin nähern sich die Glieder dieser Reihen bald.

Funfzehntes Kapitel.

Von der Radlinie oder Cykloide.

§. 312.

Erklärung.

Es rolle ein Kreis in einer Ebene auf der geraden Linie ac (Fig. 62)) so, daß die Peripherie desselben an der geraden Linie ac beständig anschließt, so beschreibt ein jeder Punkt der Peripherie eine krumme Linie, welche die Cykloide oder Radlinie genennet wird. Soll die Radlinie ganz beschrieben werden, so muß der Punkt wie h anfänglich mit a in der geraden ac zusammenfallen, hernach aber auf c zu liegen kommen. Die gerade Linie ac heißt die Basis oder Grundlinie und der Kreis, wovon ein jeder Punkt der

Pe-

Peripherie eine Radlinie beschreibet, der erzeugende Kreis.

§. 313.

Zusatz.

Der Theil fh des erzeugenden Kreises, welcher schon den Theil ah der Radlinie beschrieben hat, ist dem Theile af der Grundlinie ac gleich. Denn alle unendlich kleine Theile des Bogens fh haben auf allen unendlich kleinen Theilen der geraden af gelegen, mithin ist auch die Summe jener der Summe dieser gleich oder der Bogen fh = der geraden af. Aus eben diesem Grunde ist die halbe Peripherie des erzeugenden Kreises der halben Grundlinie mithin auch die ganze Peripherie der ganzen Grundlinie gleich groß.

§. 314.

Zusatz.

Man nehme den Halbmesser gm = gl < gh an, und beschreibe hiermit den Bogen ml, so gehöret hierzu noch eben der Winkel hgf wie zu dem größern Bogen hf. So bald der Punkt h mit a zusammenfällt, so fällt m in k und der Halbmesser hg steht in a auf der Grundlinie senkrecht. So bald aber der große Kreis fortrollt, rollt zugleich der concentrische kleinere Kreis mit, und es wird im kleinern Kreise der Bogen ml fortgerollt seyn, wenn im größern Kreise der Bogen hf fortgerollt ist, so daß der Punkt l in dem Halbmesser gf liegt, der auf der Grundlinie ab senkrecht

recht stehet. Man ziehe die gerade Linie kl, auf welcher der Bogen ml wird fortgerollt seyn, wenn der größere Bogen hf auf af fortgerollt ist, so ist kl parallel mit af und folglich kl = af. Es ist demnach der Bogen ml auf einer Linie fortgerollt, welche der Länge desselben nicht gleich ist. Beschreibet man aus dem Mittelpunkte g mit einem größern Halbmesser als gf ist, einen Kreisbogen, so erhält man eben so wie vorhin einen ähnlichen concentrischen Bogen, welcher auf einer Linie, die mit af parallel und derselben gleich ist, fortrollt; demnach ist dieser Bogen größer als die gerade Linie.

§. 315.

Erklärung.

Diejenige Cykloide, welche ein jeder Punkt der Peripherie eines Kreises, wozu der Halbmesser fg gehöret, beschreibt, mithin die Grundlinie der Peripherie des beschreibenden Kreises gleich ist, heißt eine einfache Cykloide. Diejenie Cykloide hingegen, welche ein jeder Punkt der Peripherie eines Kreises, welcher den kleinern Halbmesser gl hat, beschreibt, heißt eine verlängerte Cykloide und diejenige, welche ein Punkt eines Kreises, der einen größern Halbmesser als gf hat, beschreibet, eine abgekürzte Cykloide.

§. 316.

Aufgabe.

Es sey in der einfachen Cykloide der Halbmesser des erzeugenden Kreises = g; und der Theil

af

af der Grundlinie ac gegeben, man sucht den dazu gehörigen Winkel fgh.

Auflösung.

Es sey das Verhältniß des Durchmessers zur Peripherie = 1 : π, so ist die Peripherie desjenigen Kreises, welcher ϱ zum Halbmesser hat, = $2\pi\varrho$; ferner setze man af = hf = α, so hat man

$$2\pi\varrho : \alpha = 4R : fgh, \text{ folglich}$$

$$fgh = \frac{2R}{\pi\varrho} \cdot \alpha.$$

§. 317.

Zusatz.

Weiß man also, was für ein Winkel im Mittelpunkte einem Kreisbogen von gegebener Länge eines gegebenen Kreises zugehöret, so ist auch für eine jede Stelle des Mittelpunktes g die Stelle des Punktes h in der einfachen Cykliode gegeben.

§. 318.

Zusatz.

Wenn $\alpha = \pi\varrho$ oder = ab wird, so ist fgh = 2R, und die Stelle des beschriebenen Punktes h ist d. Durch den Punkt h ziehe man ho mit ac parallel, so ist af = dem Bogen fh = dem Bogen bp und ab = der halben Peripherie des erzeugenden Kreises. Hieraus ergiebt sich

$$ab - af = fb = bpd - bp$$
$$= pd = ro = op + pr.$$

Fer-

Ferner ist $rh = op$, folglich auch

$$ro = rh + pr = ph = pd.$$

§. 319.

Aufgabe.

Es sey $do = x$ eine Abscisse und oh die dazu gehörige Applikate oder $= y$, man soll eine Gleichung für die einfache Cykloide suchen.

Auflösung.

Man setze den Durchmesser $db = 2$, so hat man

$$op = \sqrt{(2x - x^2)}.$$

Ferner ist $oh = op + ph = y$, aber

$$ph = pd = \text{A. sin. v. x},$$

mithin

$$y = \text{A. sin. v.} x + \sqrt{(2x - x^2)}$$

welches die gesuchte Gleichung für die Cykloide ist.

§. 320.

Lehrsatz.

In der abgekürzten so wohl als verlängerten Cykloide verhält sich ein Theil der Grundlinie zu dem dazu gehörigen Kreisbogen, welcher einen Theil der Cykloide beschrieben hat, wie die ganze Grundlinie zur ganzen Peripherie des erzeugenden Kreises.

Beweis.

Es sey hm (Fig. 63. 64) der Halbmesser des für die einfache Cykloide erzeugenden Kreises und

hl der Halbmesser des erzeugenden Kreises für di verkürzte oder verlängerte Cykloide. So bald de Punkt m mit a zusammenfällt so fällt auch l mit k zusammen und es ist absenkrecht auf bd und ml = ba. Eben so ist auch cd auf bd senkrecht und = ab = ml; demnach lauft ac mit bd parallel und es ist ac = bd. Durch den Punkt i lasse man ik senkrecht auf bd herab, so ist ai = bk = dem Bogen im. Nun hat man

im : kl = hm : hl oder
bk : kl = hm : hl.

Aber hm : hl = Periph. d. K hm : Per. d. K, h folglich auch

bk : kl = Perip. d. K. hm : Periph. d. K hl

Ferner ist die Peripherie des Kreises hm = ac = bd mithin

bk : kl = bd : Periph. d. Kr. hl.

§. 321.

Zusatz.

Es sey gp eine Abscisse oder = x und pl die dazu gehörige Applikate oder y, so hat man

y = pq + ql
= nk + ql.

Ferner ist op = ql mithin auch

op + oq = ql + oq oder
lo = qp und daher
kn = lo.

Nun hat man bn : Bogen nog = bk : Bogen kl od.
bn : Bogen nog = bk : Bogen no,o.
bn : bk = Bogen nog : Bogen no,

dem

emnach bn — bk : bn = Bogen (nog — no):
Bogen nog. oder
kn : bn = Bog. og : Bog. nog oder
lo : bn = Bog. og : Bog. nog oder
lo : Bogen og = bn : Bogen nog u.
lo: Bogen og = 2bn : 2Bog.nog.d.h.

r Theil lo der Applikate lp, welcher zwischen dem eugenden Kreise und der Cykloide liegt, verhält zum abgeschnittenen Kreisbogen og wie die undlinie zur Peripherie des erzeugenden Kreises.

§. 322.

Aufgabe.

Es sind gp und pl zwey Coordinaten, man ht eine Gleichung für die Cykloide.

Auflösung.

Wenn das Verhältniß der Grundlinie der kloide zur Peripherie des erzeugenden Kreises $\alpha : \beta$ gesetzet wird, so hat man

lo : Bogen og = $\alpha : \beta$ oder
lo : A. si. v. gp = $\alpha : \beta$, mithin

$$lo = \frac{\alpha . A. \sin. v. gp}{\beta}$$

etzt man nun gp = x und pl = y, so hat man

$$y = lo + op$$

d $op = \sqrt{(2x - x^2)}$, wenn gn = 2 gesetzet ird, folglich

$$y = \frac{\alpha}{\beta} . A. \sin. v. x + \sqrt{(2x - x^2)}$$

d das ist die gesuchte Gleichung für die Cykloide.

Ist $\alpha = \beta$, so gehöret diese Gleichung z einfachen Cykloide, ist $\alpha < \beta$, so gehöret sie z abgekürzten und ist $\alpha > \beta$, so gehöret sie zur ve längerten Cykloide.

§. 323.

Aufgabe.

Für einen jeden Punkt der Cykloide die Su tangente zu finden.

Auflösung.

In einer jeden krumme Linie ist die Su tangente

$$= y \cdot \frac{dx}{dy}.$$

Aus der Gleichung der Cykloide

$$y = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \text{A. sin. v. } x + \sqrt{(2x - x^2)}$$

hält man

$$dy = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{dx}{\sqrt{(2x - x^2)}} + \frac{(1 - x)}{\sqrt{(2x - x}}$$

oder

$$dy = \frac{(\frac{\alpha}{\beta} + 1 - x)\, dx}{\sqrt{(2x - x^2)}} \text{ oder}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\alpha}{\beta} + 1 - x}{\sqrt{(2x - x^2)}}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\sqrt{(2x - x^2)}}{\frac{\alpha}{\beta} + 1 - x} \text{ und}$$

$$y.\frac{dx}{dy} = \frac{y\sqrt{(2x - x^2)}}{\frac{\alpha}{\beta} + 1 - x}$$

§. 324.

Zusatz.

In der einfachen Cykloide ist $\alpha = \beta$, mithin $\frac{\alpha}{\beta} = 1$, und es wird

$$y.\frac{dx}{dy} = \frac{y\sqrt{(2x - x^2)}}{2 - x}.$$

Hieraus erhält man folgende Proportion

$2 - x : \sqrt{(2x - x^2)} = y$; Subtangente.

§. 325.

Aufgabe.

Es ist der Punkt f (Fig. 65.) der einfachen Cykloide gegeben, man soll die Subtangente zeichnen.

Auflösung.

Es sey afc die Helfte der Cykloide, mithin cb der Durchmesser des erzeugenden Kreises. Aus dem Punkte f ziehe man fe auf dem Durchmesser senkrecht, und beschreibe den Halbkreis cdb Ferner ziehe man die Sehne dc, und hiermit die Li-

nie fg parallel, so wird fg die Tangente mithin die Subtangente für den Punkt f seyn.

Beweis.

Wenn der Durchmesser cb = 2 gesetzet wird, so hat man be = cb − ce = 2 − x und de = $\sqrt{(2x - x^2)}$. Nun ist

be : ed = ed : ec und

wegen der Aehnlichkeit der beyden Dreyecke efg und edc

ed : ec = ef : eg, also auch

be : ed = ef : eg oder

$2 - x : \sqrt{(2x - x^2)} = y$: Subtangente (§. 324.).

§. 326.

Aufgabe.

Die Tangente für einen jeden Punkt der Cykloide zu finden.

Auflösung.

Es ist die Tangente $= y\sqrt{(1 + \frac{dx^2}{dy^2})}$.

Die Gleichung der Cykloide gab

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\sqrt{(2x - x^2)}}{\frac{\alpha}{\beta} + 1 - x}, \text{ folglich}$$

$$\frac{dx^2}{dy^2} = \frac{2x - x^2}{(\frac{\alpha}{\beta} + 1 - x)^2} \text{ und}$$

$$1+\frac{dx^2}{dy^2}=\frac{2x-x^2+(\frac{\alpha}{\beta}+1-x)^2}{(\frac{\alpha}{\beta}+1-x)^2}$$

$$=\frac{\frac{\alpha^2}{\beta^2}+\frac{2\alpha}{\beta}-\frac{2\alpha x}{\beta}+1}{(\frac{\alpha}{\beta}+1-x)^2}.$$

$$=\frac{\alpha^2+2\alpha\beta-2\alpha\beta x+\beta^2}{\beta^2(\frac{\alpha}{\beta}+1-x)^2}$$

$$=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta x}{\beta^2(\frac{\alpha}{\beta}+1-x)^2}$$ und

$$\sqrt{(1+\frac{dx^2}{dy^2})}=y.\frac{\sqrt{((\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta x)}}{\beta(\frac{\alpha}{\beta}+1-x)}.$$

§. 327.

Zusatz.

In der einfachen Cykloide ist $\frac{\alpha}{\beta}=1$, folglich wird die Tangente

$$y.\frac{\sqrt{(1+2-2x+1)}}{2-x}$$

$$=y.\frac{\sqrt{(2(2-x)}}{2-x}.$$

Hieraus erhält man folgende Proportion

$$2 - x : \sqrt{(2(2-x))} = y : \text{Tangente}$$

§. 328.

Aufgabe.

Die Subnormale für einen jeden Punkt der Cykloide zu finden.

Auflösung.

Es ist die Subnormale =

$$y \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Aus der Gleichung der Cykloide hat man nun

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\alpha}{\beta} + 1 - x}{\sqrt{(2x - x^2)}}$$

$$y\frac{dy}{dx} = y \cdot \frac{\frac{\alpha}{\beta} + 1 - x}{\sqrt{(2x - x^2)}}.$$

§. 329.

Zusatz.

In der einfachen Cykloide wird die Subtangente

$$= y \cdot \frac{2 - x}{\sqrt{(2x - x^2)}}.$$

§. 330.

Aufgabe.

Die Normale für einen jeden Punkt der Cykloide zu finden.

Auflösung.

Die Normale ist =

$$y.\sqrt{(1+\frac{dy^2}{dx^2})}.$$

Aus der Gleichung der Cykloide hat man

$$\frac{dy^2}{dx^2}=\frac{(\frac{\alpha}{\beta}+1-x)^2}{2x-x^2} \text{ und}$$

$$1+\frac{dy^2}{dx^2}=\frac{(\frac{\alpha}{\beta}+1-x)^2+2x-x^2}{2x-x^2}$$

$$=\frac{\frac{\alpha^2}{\beta^2}+\frac{2\alpha}{\beta}-\frac{2\alpha x}{\beta}+1}{2x-x^2}$$

$$=\frac{\alpha^2+2\alpha\beta-2\alpha\beta x+\beta^2}{\beta^2(2x-x^2)}$$

$$=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\beta^2(2x-x^2)} \text{ und}$$

$$y.\sqrt{(1+\frac{dy^2}{dx^2})}=y.\frac{\sqrt{((\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta)}}{\beta\sqrt{(2x-x^2)}}.$$

§. 331.

Zusatz.

In der einfachen Cykloide wird die Normale

$$= y \cdot \frac{V(1+2-2x+1)}{V(2x-x^2)}$$

$$= y \frac{V(2(2x-x))}{V(2x-x^2)}$$

$$= y \frac{V2(2-x)}{Vx(2-x)} = yV\frac{2}{x}.$$

§. 332.

Aufgabe.

Den Halbmesser der Krümmung für einen jeden Punkt der Cykloide zu finden.

Auflösung.

Setzt man den Halbmesser der Krümmung $= \varrho$, so hat man, wenn dx als beständig angenommen wird

$$\varrho = -\frac{dx^2}{d^2y}\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Für die Cykloide ist gefunden worden

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\alpha}{\beta}+1-x}{V(2x-x^2)} \text{ und}$$

$$\frac{dy^2}{dx^2} = \frac{\left(\frac{\alpha}{\beta}+1-x\right)^2}{2x-x^2}$$

$$1+\frac{dy^2}{dx^2}=\frac{(\frac{\alpha}{\beta}+1-x)^2+2x-x^2}{2x-x^2}$$

$$=\frac{\frac{\alpha^2}{\beta^2}+\frac{2\alpha}{\beta}-\frac{2\alpha x}{\beta}+1}{2x-x^2}$$

Differenziiret man zum zweytenmale mit der Voraussetzung, daß dx als beständig betrachtet wird, so erhält man

$$\frac{d^2y}{dx}=\frac{-(2x-x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx+\frac{(1-x)dx}{\sqrt{(2x-x^2)}}.(\frac{\alpha}{\beta}+1-x)}{2x-x^2}$$

und

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-(2x-x^2+(1-x)(\frac{\alpha}{\beta}+1-x))}{(2x-x^2)\sqrt{(2x-x^2)}}$$

$$=\frac{-\frac{\alpha}{\beta}+1-\frac{\alpha x}{\beta}}{(2x-x^2)^{\frac{3}{2}}}, \text{ mithin}$$

$$\frac{dx^2}{d^2y}=\frac{(2x-x^2)}{\frac{\alpha}{\beta}+1-\frac{\alpha x}{\beta}} \text{ und}$$

$$-\frac{dx^2}{d^2y}=\frac{(2x-x^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{\alpha}{\beta}+1-\frac{\alpha x}{\beta}}$$

Setzt man also die Werthe von $\frac{dy^2}{dx^2}$ und von $\frac{dx^2}{d^2y}$

in

in dem allgemeinen Ausdruck, so ergiebt sich der Halbmesser der Krümmung für die Cykloide

$$\varrho = \frac{(2x - x)^{\frac{3}{2}} \cdot \left(\frac{a^2}{\beta^2} + \frac{2a}{\beta} - \frac{2ax}{\beta} + 1\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{a}{\beta} + 1 - \frac{ax}{\beta}}$$

$$= \frac{(2x - x^2)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{a^2}{\beta^2} + \frac{2a}{\beta} - \frac{2ax}{\beta} + 1\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{a}{\beta} + 1 - \frac{ax}{\beta}\right)(2x - x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{\left(\left(\frac{a}{\beta} + 1\right)^2 - \frac{2ax}{\beta}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{a}{\beta} + 1 - \frac{ax}{\beta}}$$

§. 333.

Zusatz.

In der einfachen Cykloide ist $\frac{a}{\beta} = 1$, demnach wird der Halbmesser der Krümmung in der einfachen Cykloide

$$\varrho = \frac{(4 - 2x)^{\frac{3}{2}}}{2 - x}$$

$$= \frac{(4 - 2x)\sqrt{(4 - 2x)}}{2 - x}$$

$$= \frac{2(2 - x)\sqrt{(4 - 2x)}}{2 - x}$$

$$= 2\sqrt{(4 - 2x)}$$

$$= 2\sqrt{2(2 - x)}.$$

d. h.

d. h. in der einfachen Cykloide ist der Halbmesser der Krümmung der mittleren Proportionallinie zwischen dem Durchmesser des erzeugenden Kreises und der Differenz dieses Durchmessers und der Abscisse doppelt genommen gleich.

§. 334.

Aufgabe.

Für die Stelle f (Fig. 65.) der einfachen Cykloide den Halbmesser der Krümmung zu zeichnen.

Auflösung.

Wenn ce = x, ef = y und cb der Durchmesser des erzeugenden Kreises ist, so ziehe man die Sehnen dc und db; mit der Sehne db zeichne man aus dem Punkte f die Linie fi parallel und mache fi = 2.bd, so wird fi der verlangte Halbmesser der Krümmung seyn.

Beweis.

In beyden ähnlichen Dreyecken cdb und edb hat man

cb : db = db : be oder
2 : db = db : (2 − x) also
$db^2 = 2(2-x)$ und
$db = \sqrt{(2(2-x))}$, mithin
$fi = 2.db = 2\sqrt{(2(2-x))}$.

§. 335.

Aufgabe.

Die Evolute der einfachen Cykloide zu finden.

Auflösung.

Es sey ce (Fig. 66.) $= x$, ef $= y$, cb $= z$, und die Abscisse der Evolute $= z$ und die dazu gehörige Applikate $= t$, so hat man

$$x = z + \frac{dx^2}{dy^2}\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right).\frac{dy}{dx}$$

$$y = -t - \frac{dx^2}{d^2y}\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)$$

wo dx als beständig betrachtet worden. Für die einfache Cykloide hat man gefunden

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2-x}{\sqrt{(2x-x^2)}}$$

$$\frac{dy^2}{dx^2} = \frac{4-4x+x^2}{2x-x^2}$$

$$1 + \frac{dy^2}{dx^2} = \frac{4-4x+x^2+2x-x^2}{2x-x^2}$$

$$= \frac{4-2x}{2x-x^2}$$

$$\frac{dx^2}{dy^2} = -\frac{(2x-x^2)^{\frac{3}{2}}}{2-x}.$$

Hieraus ergiebt sich

$$\frac{dx^2}{d^2y}\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right).\frac{dy}{dx} = -\frac{(2x-x^2)^{\frac{3}{2}}}{2-x}.\frac{4-2x}{2x-x^2}.\frac{2-x}{\sqrt{(2x-x^2)}}$$

$$= -(4-2x)$$

$$= -4+2x$$

$$= 2x-4 \text{ und}$$

$$x = z + 2x - 4 \text{ oder}$$

$$0 = z + x - 4 \text{ oder}$$

$$4 - z = x.$$

Fer-

Ferner hat man

$$\frac{dx^2}{d^2y}\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)=-\frac{(2x-x^2)^{\frac{3}{2}}}{2-x}\cdot\frac{4-2x}{2-x^2}$$ und

$$-\frac{dx^2}{dy}\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)=\frac{(2x-x^2)^{\frac{3}{2}}}{2-x}\cdot\frac{4-2x}{2x-x^2}$$

$$=2\sqrt{(2x-x^2)}, \text{ mithin}$$

$$y=-t+2\sqrt{(2x-x^2)}.$$

Statt x setze man den Werth $4-z$, so ist

$$x=-t+2\sqrt{(2(4-z)-(4-z)^2)}$$

$$=-t+2\sqrt{(6z-z^2-8)}.$$

In die Gleichung der einfachen Cykloide

$$y=A.\sin.v\,x+\sqrt{(2x-x^2)}$$

setze man statt x und y eben gefundene Werthe, so erhält man

$$-t+2\sqrt{(6z-z^2-8)}=A.\sin.v(4-z)+\sqrt{(6z-z^2-8)}$$

$$-t+\sqrt{(6z-z^2-8)}=A.\sin.v.(4-z) \text{ und}$$

$$-t=A.\sin.v.(4-z)-\sqrt{(6z-z^2-8)} \text{ od.}$$

$$-t=A.\sin.v.(4-z)-\sqrt{(2(4-z)-(4-z)^2)}$$

und dies ist die Gleichung der Evolute für die einfache Cykloide. Das Zeichen —, welches vor der Applikate t der Evolute steht, giebt zu erkennen, daß die Applikate nicht unter sondern über der Abscissenlinie liegen müsse, wie es auch die 66. Fig. zeigt, wo cm = z und mi = t ist.

§. 336.

Zusatz.

Wenn man wissen will, an welcher Stelle die Evolute ihren Anfang nimmt, so braucht man nur

nur in dem Halbmesser der Krümmung statt x die o zu setzen. Bey der einfachen Cykloide war

$$\varrho = 2\sqrt{(2(2-x)}, \text{ also, wenn } x = o$$
$$\varrho = 2\sqrt{4} = 4.$$

Wenn demnach der Halbmesser der Krümmung doppelt so groß wird, als der Durchmesser des erzeugenden Kreises, so nimmt die Evolute ihren Anfang, und das geschiehet in dem Punkte k, weil alsdenn $ck = 2cb = 4$ ist. Setzt man ferner in dem Halbmesser der Krümmung statt x den Werth 2, so wird

$$\varrho = 2\sqrt{(2(2-2)} = o.$$

Es muß also im Punkte a der Halbmesser der Krümmung $= o$ werden, und in diesem Punkte fällt die Evolute mit der einfachen Cykloide zusammen.

§. 337.

Zusatz.

Man nehme al zur Abscissenlinie an und setze $an = bm = x$, und $ni = y$, so hat man

$$x = bm = cm - cb = z - 2 \text{ also}$$
$$z = x + 2 \text{ und}$$
$$t = mi = nm - ni = ab - ni = \pi - y$$

wenn für den Halbmesser des erzeugenden Kreises $= 1$ die halbe Peripherie $= \pi$, gesetzet wird. Diese Werthe von z und t setze man in die Gleichung der Evolute

$$t = A.\ \text{sin. v.}(4-z) - \sqrt{(2(4-z) - (4-z)^2)}$$

so erhält man

$+\pi$

$$+\pi - y = \text{A. sin. x.}(2-x) - \sqrt{(2(2-x) - (2-x)^2)} \text{ oder}$$

$$\pi - y = \text{A. sin. v.}(2-x) - \sqrt{(2x-x^2)}$$

oder

$$y = \pi - \text{A. sin. v.}(2-x) + \sqrt{(2x-x^2)}.$$

Nun ist $nl = 2 - x$ und der Bogen

$ol = $ A. sin. v. $(2-x)$, mithin

$\pi - ol = \pi -$ A. sin. v $(2-x) = ao =$ A. sin. v. x

und es wird

$$y = \text{A. sin. v. x} + \sqrt{(2x-x^2)}.$$

Hieraus ist klar, daß die Evolute der einfachen Cykloide derselben in allen vollkommen gleich und ähnlich ist.

§. 338.

Aufgabe.

In der Cykloide die größte Applikate zu finden.

Auflösung.

Wenn die Applikate am größten geworden ist, so muß $\frac{dy}{dx} = o$ geworden seyn. Nun ist in der Gleichung der Cykloide gefunden

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\alpha}{\beta} + 1 - x}{\sqrt{(2x-x^2)}}, \text{ folglich}$$

$$o = \frac{\frac{\alpha}{\beta} + 1 - x}{\sqrt{(2x-x^2)}} \text{ oder}$$

$$0 = \frac{\alpha}{\beta} + 1 - x \text{ und}$$

$$x = \frac{\alpha}{\beta} + 1 = \frac{\alpha+\beta}{\beta}.$$

Differenziiret man zum zweytenmale mit der Voraussetzung, daß dx beständig betrachtet wird, so erhält man

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-\frac{\alpha}{\beta} + 1 - \frac{\alpha x}{\beta}}{(2x - x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

und statt x den Werth $\frac{\alpha}{\beta} + 1$ gesetzt

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-\frac{\alpha}{\beta} + 1 - \frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{\alpha}{\beta} + 1\right)}{\left(2\left(\frac{\alpha}{\beta} + 1\right) - \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-\left(1 - \frac{\alpha^2}{\beta^2}\right)}{\left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{2}{2}}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\alpha^2}{\beta^2}\right)}}.$$

In der einfachen Cykloide ist $\frac{\alpha}{\beta} = 1$, mithin

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{1-1} = -\frac{1}{0} = \infty.$$

Weil

Weil hier also eine unendliche Größe entstehet, so sieht man, daß bey der einfachen Cykloide keine größte Applikate statt finden kann. Es nehmen zwar die Applikaten mit dem Wachsthume von x zu, und dies Wachsthum hat seine Grenze; allein alsdenn nehmen sie nicht wieder ab, sondern sie werden unmöglich, indem $y = A.\ \text{sin. v.}\ x + \sqrt{(2x - x^2)}$ imaginär wird, wenn x größer als 2 wird.

In der verlängerten Cykloide ist $\alpha > \beta$ mithin auch $\frac{\alpha^2}{\beta^2} > 1$, demnach wird auch der Ausdruck $\frac{1}{\sqrt{(1 - \frac{\alpha^2}{\beta^2})}}$ imaginär, und es findet auch hier eigentlich keine größte Applikate statt.

In der verkürzten Cykloide ist $\alpha < \beta$, und es giebt $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{\sqrt{(1 - \frac{\alpha^2}{\beta})}}$ wirklich eine negative Größe; es findet also hier eine größte Applikate statt, und zwar in dem Falle, wenn $x = \frac{\alpha}{\beta} + 1$ ist.

§. 339.

Aufgabe.

Die Cykloide zu rektificiren.

Auflösung.

Aus der Gleichung der Cykloide suche man den Werth von

$$V(dy^2+dx^2)$$

in einer Funktion von x und dx oder in einer Funktion von y und dy, integrire alsdenn, das Integral wird die Länge der Cykloide angeben, welche x oder y bestimmt. Es ist gefunden

$$dy = \frac{\frac{\alpha}{\beta}+1-x}{V(2x-x^2)} \cdot dx, \text{ also}$$

$$dy^2 = \frac{(\frac{\alpha}{\beta}+1-x)^2}{2x-x^2} \cdot dx^2$$

$$dy^2+dx^2 = \frac{(\frac{\alpha}{\beta}+1-x)^2}{2x-x^2} \cdot dx^2+dx^2$$

$$= \frac{(\frac{\alpha}{\beta}+1-x)^2+2x-x^2}{2x-x^2} \cdot dx^2$$

$$= \frac{\frac{\alpha^2}{\beta^2}+\frac{2\alpha}{\beta}+1-\frac{2\alpha x}{\beta}}{2x-x^2} \cdot dx^2$$

$$= \frac{(\frac{\alpha}{\beta}+1)^2-\frac{2\alpha x}{\beta}}{2x-x^2} \cdot dx^2 \text{ und}$$

$$V(dy^2+dx^2) = dxV\left(\frac{(\frac{\alpha}{\beta}+1)^2-\frac{2\alpha x}{\beta}}{2x-x^2}\right)$$

Ver-

Verwandelt man also dieses Längenelement in eine unendliche Reihe, so kann ein jedes Glied integriret werden.

§. 340.

Zusatz.

In der einfachen Cykloide ist $\frac{\alpha}{\beta} = 1$, folglich wird

$$V(dy^2+dx^2) = dx V\frac{4-2x}{2x-x^2}$$

$$= dx V\frac{2(2-x)}{x(2-x)}$$

$$= dx V\frac{2}{x}$$

$$= x^{-\frac{1}{2}} dx V2$$

mithin hiervon das Integral

$$\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} V2+C \text{ oder}$$

$$\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \cdot V2+C \text{ oder}$$

$$2Vx V2+C \text{ oder}$$

$$2V2x+C.$$

wenn der Bogen von da angerechnet werden soll wo $x=0$ ist, so ist auch der Bogen selbst $=0$, mithin verschwindet auch C und es ist das vollständige Integral

$$2V2x.$$

Wenn x dem Durchmesser des erzeugenden Kreises mithin der 2 gleich wird, so erhält man die halbe Cykloide

$= 2\sqrt{2.2} = 2\sqrt{4} = 4$ d. h.
die halbe Cykloide ist doppelt so groß als der Durchmesser des erzeugenden Kreises.

§. 341.

Aufgabe.

Die Cykloide quadriren.

Auflösung.

Aus der gegebenen Gleichung der Cykloide suche man den Werth von ydx, und integrire selbigen. Es ist nemlich

$$y = \frac{\alpha}{\beta}. \text{ A. sin. v.x} \mp \sqrt{(2x - x^2)} \text{ und}$$

$$ydx = \frac{\alpha}{\beta}. \text{ A. sin. v.x}dx \mp dx\sqrt{(2x - x^2)}.$$

Um dieses Flächenelement zu integriren muß nicht allein A. sin. v. x durch eine unendliche Reihe des Bogens x, sondern auch der irrationale Ausdruck $\sqrt{(2x - x^2)}$ in eine unendliche Reihe verwandelt werden.

§. 342.

Aufgabe.

Zu untersuchen, ob die Cykloide einen Beugungspunkt habe.

Auflösung.

Soll ein Beugungspunkt statt finden, so muß $\frac{d^2y}{dx^2} = o$ seyn. Aus der Gleichung der Cykloide ist gefunden worden d^2y

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\frac{\alpha}{\beta} + 1 - \frac{\alpha x}{\beta}}{(2x - x^2)^{\frac{1}{2}}}\frac{\beta}{}, \text{ mithin}$$

$$0 = -\frac{\frac{\alpha}{\beta} + 1 - \frac{\alpha x}{\beta}}{(2x - x^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{\beta}{} \text{ und}$$

$x = -(\frac{\alpha}{\beta} + 1 - \frac{\alpha x}{\beta})$ oder

$0 = -\alpha - \beta + \alpha x$ und

$\alpha + \beta = \alpha x$ und

$\frac{\alpha+\beta}{\alpha} = x = 1 + \frac{\beta}{\alpha}$.

Differenziiret man zum drittenmale, so erhält man

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{-\frac{\alpha}{\beta}(2x - x^2)^{\frac{3}{2}} - 3(\frac{\alpha}{\beta} + 1 - \frac{\alpha x}{\beta})}{(2x - x^2)^3}$$

$$(2x - x^2)^{\frac{1}{2}}(1 - x)$$

$$= +\frac{\frac{\alpha}{\beta}(2x - x^2)^{\frac{3}{2}} + 1(\frac{\alpha}{\beta} + 1 - \frac{\alpha x}{\beta})}{(2x - x^2)^3}$$

$$(2x - x^2)^{\frac{1}{2}}(3 - x).$$

Setzt man statt x den Werth $1 + \frac{\beta}{\alpha}$, so wird

$$2x - x^2 = 2(1 + \frac{\beta}{\alpha}) - (1 + \frac{\beta}{\alpha})^2$$

$$= 1 - \frac{\beta^2}{\alpha^2} \text{ und}$$

$$\frac{\alpha}{\beta} + 1 - \frac{\alpha x}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta} + 1 - \frac{\alpha}{\beta}\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right)$$

$$= \frac{\alpha}{\beta} + 1 - \frac{\alpha}{\beta} - 1 = 0$$

folglich

$$\frac{d^3y}{dx^2} = \frac{\alpha}{\beta}\left(1 - \frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{}{\left(1 - \frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)^3}$$

$$= \frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\left(1 - \frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

In der einfachen Cykloide ist $\alpha = \beta$, mithin $\frac{\alpha}{\beta} = 1$, und es wird das dritte Differenzial unendlich; mithin findet hier kein Beugungspunkt statt. Ist ferner $\alpha < \beta$, so wird das Differenzial imaginair, also kann auch hier kein Beugungspunkt statt finden. Ist endlich $\alpha > \beta$, so wird das dritte Differenzial eine positive Größe, also findet hier ein Beugungspunkt statt.

Sechzehntes Kapitel.

Von den krummen Linien, deren Ordinaten aus einem Punkte gehen.

§. 343.

Erklärung.

Wenn sich eine gerade Linie um einen gewissen festen Punkt in einerley Ebene herumdrehet, so kann ein Punkt in selbiger nach und nach andere Lagen bekommen, und dadurch eine krumme Linie beschreiben, welche eine Polarlinie genennet wird. Der feste Punkt, um welchen sich die gerade Linie drehet, heißt auch der Pol der krummen Linie, und eine jede gerade Linie, welche aus dem Pol auf irgend einen Punkt der Polarlinie gezogen wird, der Radius vektor oder kurz der Vektor. Den Winkel, welchen die gerade Linie von der ersten Bewegung an beschrieben hat, nennt man den Polarwinkel.

§. 344.

Erklärung.

Die gerade Linie ca (Fig. 67.) drehet sich um den Pol c gleichförmig, wenn sie in gleichen Zeiten ihre Lage um gleiche Winkel verändert, daß folglich der Winkel acb = bcf, wenn die Linie ac von a nach b zu kommen eben so viele Zeit braucht, als von b nach f. Auch beweget sich ein Punkt gleichförmig auf einer Linie, wenn er in

gleichen Zeiten gleiche Räume auf selbiger beschreibet. So drehet sich der Punkt a auf der Peripherie eines Kreises gleichförmig, wenn sich der Halbmesser ca um den Mittelpunkt gleichförmig drehet.

§. 345.

Erklärung.

Es sey ca der Halbmesser eines Kreises, und dieser drehe sich gleichförmig um den Mittelpunkt c, zugleich bewege sich aber auch ein Punkt aus dem Mittelpunkte c auf dem Halbmesser ca gleichförmig mit derjenigen Geschwindigkeit, womit er den Halbmesser durchläuft, wenn sich der Halbmesser durch 4R gedrehet hat, so beschreibet dieser Punkt die krumme Linie cda, welche von dem Erfinder die Archimedische Schneckenlinie oder Spirallinie genennet wird.

§. 346.

Zusatz.

Bedeutet der Halbmesser $ca = \varrho$, die Peripherie des Kreises $= p$ und der Bogen $ab = x$, so wird vermöge der Erklärung der Spirallinie erfordert, daß

$$4R : acb = \varrho : cd.$$

Weil nun $4R : acb = p : x$, so ist auch

$$p : x = \varrho : cd.$$

§. 347.

Zusatz.

Wenn der Halbmesser ca einen Umlauf gemacht hat, so kann er wiederum von neuen sich drehen. Käme er zum zweytenmale in die Lage cb, so ist der Winkel, welchen er von der ersten Bewegung an beschrieben hat = 4R + acb, mithin der dazu gehörige Kreisbogen = p + x. Der Punkt, welcher bey der ersten Bewegung die Spirallinie beschrieb, und nach dem ersten Umlauf in c kam, kann nun beym zweyten Umlauf über den Halbmesser hinausfallen und in e sich befinden, wenn ca in cb angelangt ist; alsdenn hat man

$$p : p + x = \varrho : ce.$$

Auf eben diese Weise kann der Halbmesser das dritte, vierte und überhaupt das nte mal umlaufen. Nach dem nten Umlaufe wird der bewegliche Punkt, welcher die Spirallinie beschreibet, von dem Mittelpunkte des Kreises um $n\varrho$ entfernet seyn.

§. 348.

Erklärung.

Dasjenige, was in der Spirallinie nach dem ersten, zweyten, dritten, vierten u. s. Umlaufe des Halbmessers beschrieben ist, hat Archimedes mit dem Nahmen der ersten, zweyten, dritten vierten u. s. Spirallinie beleget; eigentlich sind es nur Theile einer Spirallinie.

§. 349.

Aufgabe.

Eine Gleichung für die Spirallinie zu finden

Auflösung.

Vermöge des §. 346. hat man

$$p : x = \varrho : cd$$

und wenn der Radius vektor $cd = y$ gesetzet wird

$$p : x = \varrho : y, \text{ folglich}$$

$$y = \frac{\varrho}{p} . x$$

und das ist die Gleichung der Spirallinie.

§. 350.

Zusatz.

Man kann zwischen den Geschwindigkeiten der Punkte a und d oder zwischen x und y ein anderes Verhältniß, als das Verhältniß $p : \varrho$ annehmen. So kann z. E. $y = \frac{\varrho}{\mu p} . x$ angenommen werden, und es wird nach den ersten Umlauf des Halbmessers die Spirallinie den Halbmesser in einer Entfernung von dem Mittelpunkte schneiden, welche $= \frac{\varrho}{\mu}$ ist.

§. 351.

Erklärung.

Es drehe sich der Halbmesser ca (Fig. 68.) um den Mittelpunkt c gleichförmig. In diesem

Halb-

Halbmesser nähere sich der Punkt a bey der Umwendung des Halbmessers dem Mittelpunkte c so, daß cd nach einer geometrischen Progression abnehme, so heißt alsdenn die vom Punkte a beschriebene krumme Linie adef eine logarithmische Spirallinie. Es könnte auch cd nach einer geometrischen Progression zunehmen, da alsdenn die logarithmische Spirallinie ausserhalb der Fläche des Kreises fallen würde.

§. 352.

Aufgabe.

Eine Gleichung für die logarithmische Spirallinie zu finden.

Auflösung.

Weil der Halbmesser des Kreises von der logarithmischen Spirallinie allemal so geschnitten wird, daß die Entfernung des Mittelpunktes von diesem Durchschnittspunkte in einer geometrischen Progression abnimmt, wenn der Halbmesser des Kreises um den Mittelpunkt sich gleichförmig drehet, so wächst der Kreisbogen in einer arithmetischen Progression, mithin ist

$$ab = l.\,cd.$$

Es sey der Halbmesser $ac = \varrho$, der Bogen $ab = x$, und der Radius Vektor $cd = y$. In dem natürlichen Logarithmensysteme sey der natürliche Logarithme von $y = l.\,y$, so wird der Logarithme von y in dem Systeme, wo μ der Model ist

$$= \mu l.\,y \text{ seyn.}$$

Dem-

Demnach ist

$$\mu l. y = x$$

und wenn $\mu = 1$

$$l. y = x.$$

§. 353.

Zusatz.

Weil die Radiivektoren einer logarithmischen Spirallinie beständig in einer geometrischen Progression abnehmen oder auch wachsen, diese aber ohne Ende abnehmen oder wachsen können, so sieht man, daß die Spirallinie nie mit dem Pol zusammenfallen kann, sondern sie windet sich um selbigen ohne Ende herum.

§. 354.

Erklärung.

Es schneide den Halbmesser ca (Fig. 69.) die Linie ea senkrecht in a; der Halbmesser ca beschreibe mit einer gleichförmigen Bewegung um den Mittelpunkt c den Quadranten ahd, zugleich bewege sich aber auch die gerade Linie ea und in selbiger der Punkt a gleichförmig fort, so daß, wenn ae die Lage eg erhalten hat, der Punkt a die Lage f bekommt, und von dem beweglichen Halbmesser ca in f geschnitten wird, so beschreibet der Punkt a, welcher in der beweglichen Linie ae beständig seine Stelle hat, eine krumme Linie afk, welche von dem Erfinder die Dinostratische Quadratrix genennet wird.

§. 355.

Aufgabe.

Eine Gleichung für die Diuostratische Quadratrix zu finden.

Auflösung.

Vermöge der Erklärung der Quadratrix wird erfordert, daß

$$ac : ae = ahd : ah.$$

Man setze nun den Halbmesser $ca = \varrho$, den Bogen $ah = x$, den Quadranten $ahd = \frac{1}{2}p$ und den Radius vektor $cf = y$, also wird

$$\varrho : ae = \tfrac{1}{2}p : x, \text{ mithin}$$

$$ae = \frac{\varrho \cdot x}{\frac{1}{2}p}.$$

Ferner ist $ec = ac - ae = \varrho - \frac{\varrho x}{\frac{1}{2}p}$

und wegen der Aehnlichkeit der Dreyecke fec und iac

$$ec : ac = cf : ci \text{ oder}$$

$$\varrho - \frac{\varrho x}{\frac{1}{2}p} : \varrho = y : ci.$$

Es ist aber ci die Sekante des Bogens ah, folglich

$$ci = \varrho \sec. x, \text{ und man hat}$$

$$\varrho - \frac{\varrho x}{\frac{1}{2}p} : \varrho = y : \varrho \sec. x \text{ oder}$$

$$\varrho\left(1 - \frac{x}{\frac{1}{2}p}\right) : \varrho = y : \varrho \sec. x \text{ oder}$$

$$1 - \frac{x}{\frac{1}{2}p} : 1 = y : \varrho \sec. x \text{ und}$$

$$y =$$

$$y = \varrho . \text{sec. } x \left(1 - \frac{x}{\frac{1}{2}p}\right).$$

Ferner ist $\text{sec. } x = \frac{1}{\text{cos. } x}$, folglich

$$y = \frac{\varrho}{\text{cos. } x}\left(1 - \frac{x}{\frac{1}{2}p}\right) \text{ oder}$$

$$y = \frac{\varrho\left(\frac{1}{2}p - x\right)}{\frac{1}{2}p . \text{cos. } x}$$

$$= \frac{\varrho(p - 2x)}{p . \text{cos. } x}.$$

und dies ist die Gleichung der Quadratrix.

§. 356.

Erklärung.

Es sey bcd (Fig. 70.) ein Kreisbogen, wozu der Halbmesser ac = ad gehöret, und es rolle ein Kreis, dessen Durchmesser ci vor der Bewegung mit dem Halbmesser ac in gerader Linie liegt, um den Kreisbogen cd, so wird ein jeder Punkt wie i in dem beweglichen Kreise eine krumme Linie ife beschreiben, welche eine Epicykloide genennet wird.

§. 357.

Zusatz.

Man kann sich vorstellen, daß die Epicykloide durch eine gleichförmige Bewegung des beweglichen Kreises beschrieben werde, da zugleich der Halbmesser ca den Bogen cd gleichförmig beschreibet.

Der

Der Durchmesser des beweglichen Kreises, welcher anfänglich die Lage ci hatte, wird in der Stelle g die Lage ke erhalten haben und mit dem Durchmesser fd den Winkel fge machen. Nimmt man also die eben gesetzten Bewegungen gleichförmig an, so müssen sich die Winkel fge und cad zu einander verhalten, wie die Geschwindigkeiten.

§. 358.

Aufgabe.

Eine Gleichung für die Epicykloide zu finden.

Auflösung.

Es sey der Halbmesser ac = c, ge = r der Radius Vektor ae = y, der Winkel cad = α und der Winkel fge = β. Aus dem Punkte e lasse man el senkrecht auf af herab, so hat man in dem rechtwinklichten Dreyecke lge

eg : el = 1 : sin β oder
r : el = 1 : sin. β, mithin
r. sin. β = el.

Ferner hat man auch

eg : gl = 1 : cos. β oder
r : gl = 1 : cos β und
gl = r. cos. β.

Ist das Verhältniß der im vorigen §. gesetzten Geschwindigkeiten = μ : ν, so ist auch

α : β = μ : ν, mithin

$\beta = \frac{\nu}{\mu} \alpha$, und man hat

$$el = r.\sin.\frac{\nu}{\mu}.\alpha \text{ und}$$

$$gl = r.\cos.\frac{\nu}{\mu}.\alpha.$$

In dem rechtwinklichten Dreyecke lae ist

$$ae^2 = al^2 + le^2 \text{ oder}$$

$$ae^2 = (ag + gl)^2 + le^2 \text{ oder}$$

$$y^2 = (\varrho + r + r.\cos.\frac{\nu}{\mu}.\alpha)^2 + (r.\sin.\frac{\nu}{\mu}.\alpha)^2$$

$$y^2 = \varrho^2 + 2r\varrho + r^2 + 2r\varrho.\cos.\frac{\nu}{\mu}.\alpha + 2r^2\cos.\frac{\nu}{\mu}\alpha$$

$$r^2.\cos.\frac{\nu}{\mu}.\alpha^2 + r^2.\sin.\frac{\nu}{\mu}.\alpha^2$$

$$= \varrho^2 + 2r\varrho + 2r^2 + (2r\varrho + 2r^2)\cos.\frac{\nu}{\mu}.\alpha$$

und das ist die Gleichung für die Epicykloide.

§. 359.

Aufgabe.

Eine Polargleichung für die Ellipse zu finden.

Auflösung.

Wenn der Radiusvektor sich um den Brennpunkt b (Fig. 71.) drehet, und aus der Lage ab in bg gekommen, so daß er den Winkel abg beschrieben hat, so ziehe man aus dem Punkte g die Linie gf senkrecht herab. Nun setze man die halbe große Axe $ac = \alpha$, die Eccentricität $cb = cd = \varepsilon$, $cf = x$ den Radius vektor $bg = y$, und den Winkel

l abg $= \omega$, so hat man bf $=$ cf $-$ cb $= x - \varepsilon$,
d $= x + \varepsilon$, und gd $= 2\alpha - y$.

In den beyden rechtwinklichten Dreyecken fgd
nd gfb hat man

$$gd^2 = gf^2 + fd^2 \text{ und}$$
$$gb^2 = gf^2 + fb^2 \text{ oder}$$
$$(2\alpha - y^2) = gf^2 + (x+\varepsilon)^2 \text{ und}$$
$$y^2 = gf^2 + (x-\varepsilon)^2 \text{ oder}$$
$$4\alpha^2 - 4\alpha y + y^2 = gf^2 + x^2 + 2\varepsilon x + \varepsilon^2$$
$$y^2 = gf^2 + x^2 - 2\varepsilon x + \varepsilon^2 \text{ also}$$
$$4\alpha^2 - 4\alpha y = 4\varepsilon x \text{ oder}$$
$$\alpha^2 - \alpha y = \varepsilon x \text{ und}$$
$$y = \frac{\alpha^2 - \varepsilon x}{\alpha}.$$

n dem rechtwinklichten Dreyecke fgb hat man nun

$$gb : fb = 1 : \text{cos. } \omega \text{ oder}$$
$$y : fb = 1 : \text{cos } \omega \text{ und}$$
$$fb = y. \text{ cos. } \omega.$$

erner ist cf $=$ cb $+$ fb $= \varepsilon + y. \text{ cos. } \omega = x.$
Setzt man also diesen Werth von x in die Gleichung

$$y = \frac{\alpha^2 - \varepsilon x}{\alpha}, \text{ so ergiebt sich}$$

$$y = \frac{\alpha^2 - \varepsilon(\varepsilon + y. \text{ cos } \omega)}{\alpha} \text{ und}$$

$$\alpha y = \alpha^2 - \varepsilon^2 - \varepsilon y. \text{ cos. } \omega$$
$$\alpha y + \varepsilon y \text{ cos } \omega = \alpha^2 - \varepsilon^2 \text{ oder}$$
$$y(\alpha + \varepsilon \text{ cos. } \omega) = \alpha^2 - \varepsilon^2 \text{ und}$$
$$y = \frac{\alpha^2 - \varepsilon^2}{\alpha + \varepsilon. \text{cos. } \omega}.$$

§. 360.

Aufgabe.

Eine Polargleichung für die Hyperbel zu finden

Auflösung.

Es sey die halbe Hauptaxe ac (Fig. 73.) = ab = α, die Eccentricität ad = ae = ε, ag = x, fe = y, der Winkel feg = ω, so hat man ge = ae − ag = $\varepsilon - x$ und gd = ag + gd = $\varepsilon + x$, und fd = $2\alpha + y$. In den beyden rechtwinklichten Dreyecken dfg und gfe ist

$$df^2 = gf^2 + dg^2 \text{ und}$$
$$fe^2 = gf^2 + ge^2 \text{ oder}$$
$$(2\alpha + y)^2 = gf^2 + (\varepsilon + x)^2 \text{ und}$$
$$y^2 = gf^2 + (\varepsilon - x)^2 \text{ oder}$$
$$4\alpha^2 + 4\alpha y + y^2 = gf^2 + \varepsilon^2 + 2\varepsilon x + x^2$$
$$y^2 = gf^2 + \varepsilon^2 - 2\varepsilon x + x^2, \text{ mithin}$$
$$4\alpha^2 + 4\alpha y = 4\varepsilon x \text{ oder}$$
$$\alpha^2 + \alpha y = \varepsilon x \text{ und}$$
$$y = \frac{\varepsilon x - \alpha^2}{\alpha}.$$

In dem rechtwinklichten Dreyecke fge hat man nun

$$fe : eg = 1 : \cos.\omega \text{ oder}$$
$$y : eg = 1 : \cos.\omega \text{ und}$$
$$eg = y.\cos.\omega.$$

Es ist aber ag = x = ae − ge = $\varepsilon - y.\cos.\omega$, folglich

$$y = \frac{\varepsilon(\varepsilon - y.\cos.\omega) - \alpha^2}{\alpha} \text{ oder}$$

$$\alpha y = \varepsilon^2 - \varepsilon y \cos.\omega - \alpha^2 \text{ und}$$
$$\alpha y + \varepsilon y \cos.\omega = \varepsilon^2 - \alpha^2 \text{ und}$$

y =

$$y = \frac{\varepsilon^2 - \alpha^2}{\alpha + \varepsilon \cos. \omega}.$$

§. 361.

Aufgabe.

Eine Polargleichung für die Parabel zu finden.

Auflösung.

Es sey der Radiusvektor bf (Fig. 73.) $= y$, $be = x$ und der Winkel $fbe = \omega$, so hat man vermöge der Natur der Parabel

$$y = bf = fd = ce = cb - eb.$$

Setzt man nun den Parameter $= p$, so ist

$$y = \tfrac{1}{2}p - x.$$

In dem rechtwinklichten Dreyecke feb ist

$fb : eb = 1 : \cos. \omega$ oder

$y : eb = 1 : \cos. \omega$ mithin

$eb = y . \cos. \omega = x$ und

$y = \frac{1}{2}p - y . \cos. \omega$ oder

$(1 + \cos. \omega) y = \frac{1}{2}p$ und

$$y = \frac{\frac{1}{2}p}{1 + \cos. \omega}.$$

§. 362.

Aufgabe.

Eine Polargleichung für die Conchoide zu finden.

Auflösung.

Es sey der Radiusvektor der obern und untern Conchoide af oder $ac = y$, $ad = \alpha$, $bd =$

dg = ef = ec = β und der Winkel dae = ω, hat man in der obern Conchoide af = ae + ef = ac + β, und in der untern Conchoide ac = ae − ae = ae − β = y, mithin in der obern und untern Conchoide y = ae ± β. In dem rechtwinlichten Dreyecke ade hat man

da : ae = 1 : sec. ω oder
α : ae = 1 : sec. ω und
ae = α. sec. ω, folglich wird
y = α. sec, ω ± β.

§. 363.

Aufgabe.

Die Tangente für einen jeden Punkt einer Polarlinie zu finden.

Auflösung.

Es sey der Halbmesser ab eines Kreises = α, der Kreisbogen bc = x, und es sey für den Punkt e der Polarlinie beg die Tangente ei zu finden. Den Radiusvektor ae setze man = y, und nehme an, daß der Bogen bc um das unbestimmte Stück cd zunehme, so wird auch der Bogen be in der Polarlinie um das unbestimmte Stück eg zugenommen haben. Mit dem Halbmesser ae beschreibe man den Bogen ef, so wird fg = Δy und cd = Δx seyn. Man ziehe ferner durch die beyden Punkte g und e die gerade Linie gh, und setze auf ag in a die Linie ah senkrecht, welche gh in dem Punkte h schneiden wird. Weil die beyden Bogen cd und ef concentrisch sind, so hat man

ac : ae = cd : ef oder

e:

$$\varrho : y = \Delta x : ef \text{ und}$$

$$ef = \frac{y \cdot \Delta x}{\varrho}.$$

Der Bogen ef steht auf ae so wohl als auf af senkrecht, und man kann selbigen ohne merklichen Fehler als eine gerade Linie annehmen, demnach ist das Dreyeck efg ähnlich dem Dreyecke hag, und es ergiebt sich

$$gf : fe = ga : ah \text{ oder}$$

$$\Delta y : \frac{y\Delta x}{\varrho} = ga : ah.$$

Je kleiner nun Δx angenommen wird, desto kleiner ist auch Δy, desto näher kommt aber auch die Linie ah der Linie ai, und die Linie hg der Linie ie; in dem verschwindenden Zustande von Δx und Δy ist wirklich $ha = ia$ und $eh = ei$, und es ist

$$dy : \frac{ydx}{\varrho} = ea : ai \text{ oder}$$

$$dy : \frac{ydx}{\varrho} = y : ai, \text{folglich}$$

$$ai = \frac{y^2 \cdot dx}{\varrho dy}.$$

Da ferner ai senkrecht auf ea ist, so hat man in dem rechtwinklichten Dreyecke eai

$$ea : ai = 1 : \text{tang. iea oder}$$

$$y : ai = 1 : \text{tang. iea und}$$

$$ai = y. \text{ tang. iea, folglich auch}$$

$$y. \text{ tang. iea} = \frac{y^2 dx}{\varrho dy} \text{ oder}$$

$$\text{tang. iea} = \frac{y.dx}{\varrho dy}.$$

Sucht man also das Verhältniß $\frac{dx}{dy}$ in einer Fun-
ction von y, so läßt sich alsdenn die Tangente iea
auf den Radiusvektor senkrecht aufsetzen, und die
verlangte Tangente finden.

§. 364.

Zusatz.

In der archimedischen Spirallinie ist

$$y = \frac{\varrho}{p} \cdot x, \text{ folglich}$$

$$dy = \frac{\varrho}{p} \cdot dx \text{ und}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{p}{\varrho}, \text{ folglich}$$

$$\text{tang. iea} = \text{tang.}\lambda = \frac{yp}{\varrho^2}, \text{ und}$$

$$y.\,\text{tang}\,\lambda = \frac{y^2 p}{\varrho^2} = \frac{xy}{\varrho} \text{ d. h.}$$

$$\varrho : y = x : y \,\text{tang}\,\omega.$$

In der logarithmischen Spirallinie war

$$\mu l.\, y = x, \text{ mithin}$$

$$\mu \frac{dy}{y} = dx \text{ oder}$$

$$\mu dy = y dx \text{ und}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\mu}{y} \text{ mithin}$$

$$\text{tang.}\lambda = \frac{\mu}{\varrho}.$$

Es ist also die Tangente desjenigen Winkels, welchen der Radiusvektor mit der verlangten Tangente macht, eine beständige Größe. Wird $\varrho = u$, so ist tang. $\omega = 1$, mithin ist alsdenn ω ein Winkel von $45°$; dies findet statt, wenn der Model in einem logarithmischen Systeme dem Halbmesser des Kreises gleich ist.

§. 365.
Zusatz.

In der Dinostratischen Quadratrix ist

$$y = \frac{\varrho(p-2x)}{p.\,\text{cos.}\,x} = \frac{\varrho p - 2\varrho x}{p.\,\text{cos.}\,x}, \text{ mithin}$$

$y.\,p.\,\text{cos.}\,x = \varrho p - 2\varrho x$ und

$p.\,\text{cos.}\,x\,dy - yp.\,\text{sin.}\,x\,dx = -2\varrho\,dx$ und

$p.\,\text{cos.}\,x\,dy = (yp.\,\text{sin.}\,x - 2\varrho)\,dx$ und,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{p.\,\text{cos.}\,x}{yp.\,\text{sin.}\,x - 2\varrho}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}p.\,\text{cos.}\,x}{\frac{1}{2}p.y.\,\text{sin.}\,x - \varrho}$$

$$= \frac{\text{cos.}\,x}{y.\,\text{sin.}\,x - \frac{\varrho}{\frac{1}{2}p}}, \text{ demnach}$$

$$\text{tang.}\,\lambda = \frac{y.\,\text{cos.}\,x}{y.\,\text{sin.}\,x - \frac{\varrho}{\frac{1}{2}p}} \text{ und}$$

$$y.\text{tang.}\,\lambda = \frac{y^2.\,\text{cos.}\,x}{y.\,\text{sin.}\,x - \frac{\varrho}{\frac{1}{2}p}}$$

$$= -\frac{y^2 . \text{cof. } x}{\frac{\varrho}{\frac{1}{2}p} - y . \text{sin. } x}.$$

Hieraus erhält man folgende Proportion

$$\frac{\varrho}{\frac{1}{2}p} - y . \text{sin. } x : y . \text{cof. } x = y : -y \text{ tang. } \omega$$

welche leicht konstruiret werden kann.

§. 366.

Zusatz.

In der Ellipse ist

$$= \frac{\alpha^2 - \varepsilon^2}{\alpha + \varepsilon \text{ cof. } \omega} \text{ oder}$$

$\alpha y + \varepsilon y . \text{cof. } \omega = \alpha^2 - \varepsilon^2$, folglich

$\alpha dy + \varepsilon . \text{cof. } \omega dy - \varepsilon y . \text{sin. } \omega . d\omega = 0$ u.

$(\alpha + \varepsilon . \text{cof. } \omega) dy = \varepsilon y \text{ sin. } \omega . d\omega$ und

$$\frac{d\omega}{dy} = \frac{\alpha + \varepsilon . \text{cof. } \omega}{\varepsilon y . \text{sin. } \omega} \text{ und}$$

$$\text{tang. } \lambda = \frac{\alpha + \varepsilon . \text{cof. } \omega}{\varrho \varepsilon \text{ sin. } \omega} \text{ und}$$

$$y \text{tang. } \lambda = \frac{\alpha y}{\varrho \varepsilon \text{ sin. } \omega} + \frac{y . \text{cof. } \omega}{\varrho \text{ sin. } \omega} \text{ oder}$$

$$y \text{tang. } \lambda = \frac{\alpha y}{\varrho \varepsilon} . \text{sec. } \omega + \frac{y}{\varrho} \text{ ctang. } \omega.$$

§. 367.

Zusatz.

In der Hyperbel ist

$y =$

$$y = \frac{\varepsilon - \alpha^2}{\alpha + \varepsilon \cos.\omega} \text{ oder}$$

$\alpha y + \varepsilon y \cos.\omega = \varepsilon^2 - \alpha^2$, demnach

$\alpha dy + \varepsilon \cos.\omega dy - \varepsilon y \sin.\omega d\omega = o$ oder

$(\alpha + \varepsilon . \cos.\omega) dy = \varepsilon y \sin.\omega d\omega$ und

$$\frac{d\omega}{dy} = \frac{\alpha + \varepsilon . \cos.\omega}{\varepsilon y \sin.\omega} \text{ und}$$

$$\text{tang.}\lambda = \frac{\alpha + \varepsilon \cos.\omega}{\varrho\varepsilon \sin.\omega} \text{ und}$$

$$y \text{tang.}\lambda = \frac{y(\alpha + \varepsilon \cos.\omega)}{\varrho\varepsilon \sin.\omega} \text{ wie bey der Ellipse.}$$

§. 368.

Zusatz.

In der Parabel ist

$$y = \frac{\frac{1}{2}p}{1 + \cos.\omega} \text{ oder}$$

$y + y \cos.\omega = \frac{1}{2}p$ daher

$dy + \cos.\omega dy - y \sin.\omega d\omega = o$ und

$(1 + \cos.\omega) dy = y \sin.\omega d\omega$ und

$$\frac{d\omega}{dy} = \frac{1 + \cos.\omega}{y \sin.\omega} \text{ und}$$

$$\text{tang.}\lambda = \frac{1 + \cos.\omega}{\varrho \sin.\omega} \text{ und}$$

$$y \text{tang.}\lambda = \frac{y + y\cos.\omega}{\varrho \sin.\omega}$$

$$= \frac{y}{\varrho} . \text{cosc.}\omega + \frac{y}{\varrho} . \text{cota.}\omega.$$

§. 369.

Aufgabe.

Es ist eine Gleichung zwischen den Kreisbogen $bc = x$ und den Radiusvektor $ae = y$ gegeben, man sucht das Differenzial des Flächeninhalts der Polarlinie, oder den Sektor eag mit der Voraussetzung, daß die Punkte e und g unendlich nahe sind.

Auflösung.

1. Der Ausschnitt aeg fällt zwischen zweyen Kreisausschnitten, welche ae und ag zu Halbmessern haben, und zu welchen der Winkel aeg gehöret.

Er ist also zwischen $\frac{1}{2}ae.ef$, und $\frac{1}{2}ag\frac{ag}{ae}.ef$ enthalten, Der Unterschied zwischen diesen beyden Ausschnitten ist also $\frac{1}{2}\frac{ag^2}{ae}.ef - \frac{1}{2}ae.ef =$

$$= \frac{ag^2 - ae^2}{2ae}.ef$$

$$= \frac{(ae+fg)^2 - ae^2}{2ae}.ef$$

$$= \frac{ae^2 + 2ae.fg + fg - ae^2}{2ae}.ef$$

$$= \frac{(fg(2ae+fg)}{2ae}.ef$$

welche sich zu dem kleinsten Ausschnitt verhält — $fg(2ae+fg) : ae^2$; er wird also auch in Vergleichung mit dem kleinsten Ausschnitt verschwinden,

den, wenn die Punkte g und e sich unendlich nähern, mithin gf in dem verschwindenden Zustande sich befindet. Es ist demnach der gesuchte Ausschnitt

$$\frac{1}{2}ae.ef = \frac{y^2 dx}{2\varrho} \text{ (§. 362.).}$$

Das Integral hiervon für $x = o$ giebt die Fläche der krummen Linie, welche die Schenkel ba und ea des Winkels bae und der Bogen be begränzen.

2. Wenn sich die Polarlinie um den Punkt a mehr als einmal umwinden sollte, wie die Spirallinie, so würde man noch folgende Betrachtungen anzustellen haben; es sey die eine Umwendung begf (F. 76.), die zweyte fhonm, und ein Theil von der dritten mkl; die Punkte c, i, k liegen in dem Vektor ck, so wie auch die Punkte d, n, l in dem Vektor al, welcher dem Vektor ck unendlich nahe liegt. Man setze den Kreisbogen, welcher zu den Winkel fac gehöret, $= z$ und den dazu gehörigen Halbmesser $= \varrho$. Der Winkel fai ist $= z + 4R$, mithin der dazu gehörige Kreisbogen $= z + p$, wenn p die Peripherie des Kreises bedeutet; eben so ist der Winkel mak $= z + 2.4R$, mithin der dazu gehörige Bogen $= z + 2p$ u. f. Für diese Winkel wird also x nach und nach $= z$; $= z + p$; $= z + 2p$ u. f. und weil der Radiusvektor eine Funktion von x ist, so ist ac eine Funktion von z, ai eine Funktion von $z + p$, ak eine Funktion von $z + 2p$ u. f.

3. Hat man nun nach n. 1. die Fläche abc, welche der Vektor ac und der Bogen bc begränzt, gefunden, so setze man in dem Integrale, welches diese Fläche ausdrückt, $x = p$, so wird man den ganzen Flächeninhalt derjenigen Fläche erhalten, welche von dem Vektor af und der Polarlinie begf begränzt wird. Gleich unmittelbar an af folgt die zweyte Fläche bfic, deren Element $=$ cind ist. Ist das Integral dieses Differenzials eine Funktion von x, so muß es eine solche seyn, welche für $x = p$ verschwindet, weil sich diese zweyte Fläche da anfängt, wo $x = p$ ist. Hat man also die Fläche durch ein solches Integral ausgedrückt, so setze man in selbigem $x = 2p$; der Ausdruck giebt sodann die ganze zweyte Fläche, welche die gerade Linie mf und die krummen Linien begf und fhopm begränzen. Ueberhaupt sey fhopn die $(n-1)$te Umwindung, so gehöret selbiger ein Radiusvektor wie ai oder an zu, welcher eine Funktion von $x = z + (n-2)p$ ist. Es ist demnach der Bogen mk ein Bogen der nten Umwindung, wozu der Radiusvektor wie ak gehöret, der eine Funktion von $x = z + (n-1)p$. Die nte veränderliche Fläche wäre also mfik, deren Differenzial $=$ kinl, welches so integriret werden muß, daß es für $x = (n-1)p$ verschwindet. Es sey Ax die Funktion von x, welche den Vektor ak ausdruckt, so ist

$$kal = \frac{(A(z+(n-1)p))^2 dz}{2g}, \text{ weil } dx = dz$$

dz ist, uud ian $=$ $\frac{(A(z+(n-2)p))^2 dz}{2\varrho}$, mithin das Differenzial

kinl $=$ $\frac{(A(z+(n-1)p))^2 - (A(z+(n-2)p))^2}{2\varrho} . dz$ d. h.

in dem Ausdrucke, welchen y durch eine Funktion von x giebt, muß man zuerst $x = z+(n-1)p$ und dann $x = z+(n-2)p$ setzen, beyde Werthe von x quadriren, und das letzte Quadrat von dem ersten subtrahiren, diese Differenz endlich durch $\frac{dz}{2\varrho}$ multipliciren. Dieses Differenzial muß alsdenn so integriret werden, daß es für $x = (n-1)p$ verschwindet. Weil aber in diesem Integrale $x = z+(n-1)p$, so folget, daß $z = o$, wenn $x = (n-1)p$, und daß man folglich das Integral so suchen muß, daß es für $z = o$ in dem verschwindenden Zustande sich befindet. Ist auf diese Weise das Integral gefunden worden, so setze man in selbigem $z = p$, und man wird die nte Fläche erhalten.

§. 370.

Zusatz.

In der archimedischen Spirallinie ist

$y = \frac{\varrho}{p} . x$, mithin

$\frac{y^2 dx}{2\varrho} = \frac{y\varrho x dx}{2\varrho p} = \frac{\varrho^2 x^2 dx}{2\varrho p^2}$ als

als das Differenzial der ersten Fläche, und daher die Fläche selbst

$$= \frac{\varrho^2 x^3}{6\varrho p^2} = \frac{\varrho x^3}{6p^2},$$

mithin statt $x = p$ gesetzt, die ganze Fläche

$$= \frac{\varrho p^3}{6p^2} = \frac{1}{3}\frac{\varrho p}{2}.$$

Es ist also die ganze erste Fläche der Spirallinie = dem dritten Theile des Kreises, in welchem die Spirallinie ist beschrieben worden. Man setze nun $Ax = \frac{\varrho}{p} \cdot x$, folglich das Differenzial

$$= \frac{\varrho^2}{p^2} \cdot ((z+(n-1)p)^2 - (z+(n-2)p)^2) \cdot \frac{dz}{2\varrho}$$

$$= \frac{\varrho}{2p^2} \cdot (2pzdz + (2n-3)p^2 dz)$$

wovon das Integral =

$$\frac{z\varrho}{p} \cdot (z+(2n-3)p)$$

und statt $z = p$ gesetzt

$$(n-1)p.$$

Es wäre also die ganze zweyte Fläche $= \varrho p$ — dem sechsfachen der ganzen ersten Fläche und eine jede folgende Fläche ist ein vielfaches der zweyten durch eine Zahl, welche um eine Einheit kleiner als die Zahl der Fläche ist.

§. 371.

Aufgabe.

Das Differenzial eg (Fig. 75.) des Bogens be einer Polarlinie zu finden.

Auflösung.

Wenn die Sehne eg, so wie auch die Sehne ef gezogen wird, so hat man in dem rechtwinklichen Dreyecke efg

$$eg^2 = ef^2 + fg^2.$$

Liegt der Punkt g dem Punkte e unendlich nahe, so ist die Sehne eg die Gränze des Bogens eg und die Sehne ef die Gränze des Bogens ef; mithin ist der Bogen

$$eg^2 = \text{dem Bog. } ef^2 + fg^2$$

aber der Bogen $ef = \frac{ydx}{\varrho}$ (§. 362.), also

$$ef^2 = \frac{y^2dx^2}{\varrho^2}, \text{ und}$$

$fg = ag - af = ag - ae = dy$ und
$fg^2 = dy^2$; demnach wird der Bogen

$$eg^2 = \frac{y^2dx^2}{\varrho^2} + dy^2 \text{ und der Bogen}$$

$$eg = \sqrt{\left(\frac{y^2dx^2}{\varrho^2} + dy^2\right)}.$$

§. 372.

Zusatz.

In der archimedischen Spirallinie ist

$$y = \frac{\varrho}{p} \cdot x, \text{ folglich}$$

$$dy = \frac{\varrho}{p} \cdot dx \text{ und}^2$$

$$dy^2 = \frac{\varrho^2}{p^2} dx^2$$

$$\frac{y^2 dx^2}{\varrho^2} + dy^2 = \left(\frac{\varrho^2}{p^2} + \frac{y^2}{\varrho^2}\right) dx^2$$

$$= \left(\frac{\varrho^2}{p^2} + \frac{x^2}{p^2}\right) dx^2$$

$$= \left(\frac{\varrho^2 + x^2}{p^2}\right) dx^2 \text{ und}$$

$$\sqrt{\left(\frac{y^2 dx^2}{\varrho^2} + dy^2\right)} = \frac{dx}{p} \sqrt{(\varrho^2 + x^2)};$$

Das Integral hiervon giebt den Bogen be no dem Längenmaasse.

§. 373.

Zusatz.

In der logarithmischen Spirallinie ist

$$\mu . l. y = x, \text{ folglich}$$

$$\mu . \frac{dy}{y} = dx \text{ und}$$

$$\mu^2 . \frac{dy^2}{y^2} = dx^2$$

$$\frac{y^2 dx^2}{\varrho^2} = \frac{\mu^2}{\varrho^2} . dy^2 \text{ und}$$

dy+

$$dy^2+\frac{y^2dx^2}{\varrho^2}=\frac{\mu^2}{\varrho^2}dy^2+dy^2 \text{ oder}$$

$$dy^2+\frac{y^2dx^2}{\varrho^2}=\left(\frac{\mu^2}{\varrho^2}+1\right)dy^2$$

$$=\left(\frac{\mu^2+\varrho^2}{\varrho^2}\right)dy^2, \text{ also}$$

$$\sqrt{\left(dy^2+\frac{y^2dx^2}{\varrho^2}\right)}=\frac{dy}{\varrho}\sqrt{(\mu^2+\varrho^2)}$$

und das Integral $=\frac{y}{\varrho}\sqrt{(\mu^2+\varrho^2)}$.

Dieser Bogen, welcher unzählig viele Windungen um a machen kann, ist doch nur einer bestimmten geraden Linie gleich, nemlich der Tangente eh, indem

$$eh=\sqrt{(ea^2+ha^2)}$$

$$=\sqrt{\left(y^2+\frac{y^2\mu^2}{\varrho^2}\right)}$$

$$=\frac{y}{\varrho}\sqrt{(\varrho^2+\mu^2)}.$$

Siebenzehntes Kapitel.

Von den Flächen und doppelt gekrümmten Linien.

§. 374.

Erklärung.

Es sey ab (Fig. 77.) eine Ebene, und in selbiger die Linie cd der Lage nach bekannt; über der Ebene ab befinde sich ein Punkt g, lasse von selbigem die Linie ge senkrecht auf die Ebene herab, und ziehe durch e die Linie ef senkrecht auf cd, so wird sich ef in der Ebene ab befinden müssen, und der Punkt g wird durch die drey gegebenen Linien hf, fe und eg völlig bestimmt seyn. Der Punkt e, welcher in der Ebene ab und zugleich in dem Perpendikel ge liegt heißt hier die orthographische Projektion, oder kurz die Projektion des Punktes g. Die gegebene Ebene ab kann man die Grundfläche nennen. Auf eine ähnliche Art kann man sich über der Grundfläche ab mehrere Punkte wie g vorstellen, welche entweder in einer ebenen oder in einer krummen Fläche liegen. Zieht man alsdenn von allen diesen Punkten auf die Grundfläche ab senkrechte Linie herab, und durch alle Punkte in der Ebene auf die Linie cd lothrechte Linien, wie ef, so wird das Verhältniß zwischen cf, fe und eg durch die Natur der Fläche bestimmt werden. Auch heißen hier die

Punkte

Punkte, welche in der Grundfläche und in den senkrechten herabgelassenen Linien liegen, die orthographische Projektionen aller der Punkte über der Grundfläche. Man nehme hf = x, fe = y und eg = z, so heißt die Gleichung zwischen x, y, z die Gleichung der Fläche, in welcher sich der Punkt g befindet.

§. 375.

Zusatz.

Wäre der Punkt g in einer Ebene, welche mit der Grundfläche parallel gehet, so ist alsdenn z beständig, und würde durch x und y nicht bestimmt. Die Gleichung für die Ebene wäre also $z = \alpha$, wo α die Entfernung der einen Ebene von der andern andeutet.

§. 376.

Zusatz.

Wäre der Punkt g in einer Ebene, welche die Grundfläche in der geraden Linie cd schnitte, so verhalte sich fe : eg = Sinus totus zur Tangente des Neigungswinkels gfe der Ebene gegen die Grunbfläche. Es wäre also das Verhältniß unveränderlich wie z E. 1 : α, und die Gleichung würde $\alpha y = z$ seyn.

§. 377.

Zusatz.

Wäre cg der Halbmesser einer Kugel, mithin der Punkt g in der Oberfläche der Kugel, so

hat man $cg^2 = ge^2 + ce^2 = ge^2 + ef^2 + cf^2 = z^2 + y^2 + x^2$.

§. 378.

Aufgabe.

Es ist die Gleichung für die Stelle g gegeben, welche sich in einer Ebene befindet, die die Grundfläche ab in der geraden Linie hd schneidet, man soll eine Gleichung für die Projektion der Stelle g finden.

Auflösung.

Es sey h der Anfangspunkt der Abscissen, und von der Stelle g die Linie gc auf die Abscissenlinie hd senkrecht gezogen, so werden hc und cg senkrechte Coordinaten für die Stelle g seyn. Ferner lasse man aus g die senkrechte Linie ge auf die Grundfläche ab herab, und ziehe ce, so ist gce der Neigungswinkel der Ebene der Stelle gegen die Grundfläche, mithin ist auch das Verhältniß ce:cg gegeben z. E. $= \alpha : \beta$. Hieraus ergiebt sich $cg = \frac{\beta}{\alpha} . ce$. Demnach hat man nur nöthig in die Gleichung zwischen hc und cg den Werth $\frac{\beta}{\alpha} . ce$ zu setzen, um die Gleichung zwischen hc und ce zu erhalten.

Exempl. Es sey $hc^2 + cg^2 = \varrho^2$, so hat man auch

$$hc^2 + \frac{\beta^2}{\omega} . ce^2 = \varrho^2 \text{ oder}$$

$$\frac{\alpha^2}{\beta^2}.hc^2+ce^2=\frac{\alpha^2}{\beta^2}.\varrho^2 \text{ und}$$

$$ce^2=\frac{\alpha^2}{\beta^2}.\varrho^2-\frac{\alpha^2}{\beta^2}.hc^2 \text{ oder}$$

$$ce^2=\frac{\alpha^2}{\beta^2}(\varrho^2-hc^2).$$

liegt also der Punkt g in einem Kreise, dessen Mittelpunkt h ist, so liegt der Punkt e in einer Ellipse, deren Mittelpunkt h, und die große Axe $=2\varrho$.

§. 379.

Aufgabe.

Es wird eine Fläche mit der Grundfläche parallel geschnitten. man sucht die Gleichung für den parallelen Schnitt.

Auflösung.

Wenn die Entfernung des Schnittes von der Grundfläche $=\alpha$ ist, so setze man $z=\alpha$. Weil nemlich die Ebene des Schnittes mit der Grundfläche parallel ist, so muß auch die Ebene des Schnittes der Grundfläche gleich und ähnlich seyn. Die Coordinaten x und y also, welche jedem Punkte der Grundfläche zugehören, liegen in eben der Ebene, in welcher die Cordinaten des Schnittes liegen. Es ist demnach die Gleichung für die Punkte in der Grundfläche einerley mit der Gleichung für die ihnen zugehörigen Punkte in der Ebene des Schnittes, welche von der Grundfläche um α entfernet sind, oder man kann sich in der Ebene des Schnit-

tes für die Punkte g Coordinaten vorstellen, welch
mit den Coordinaten für die dazu gehörigen Punkt
e in der Grundfläche gleich und parallel sind, welch
also eben die Gleichung geben.

§. 380.

Zusatz.

Wenn der Halbmesser der Kugel $= \varrho$, s
hat man für selbige

$$y^2 + x^2 = \varrho^2 - \alpha^2$$

mithin ist der Schnitt ein Kreis, welcher zur
Halbmesser $= V(\varrho^2 - \alpha^2)$ hat. Die Gleichun
bleibt einerley, die Grundfläche mag durch de
Mittelpunkt eine Lage haben welche man will. Man
mag also den Schnitt der Kugel machen wie man
will, so wird auch für diesen Schnitt die Glei
chung einerley seyn, und folglich allemal einen
Kreis geben.

§. 381.

Aufgabe.

Es ist die Ebene eines Schnitts einer Fläch
mit der Grundfläche nicht parallel, man sucht di
Gestalt des Schnittes.

Auflösung.

Es sey g (Fig. 78.) ein Punkt in der Fläch
und die Durchschnittslinie der schneidenden Eben
mit der Grundfläche mn die Linie cp. Von g lass
man die Linie gk senkrecht auf die Grundfläch
herab, und ziehe kf senkrecht auf cp, so ist de

Ne

Neigungswinkel der schneidenden Ebene gfc gegen die Grundfläche = gfk. Aus c ziehe man ca senkrecht auf die Abscissenlinie ab, und cd mit ab parallel. Ferner sey fi mit ch parallel, fe auf cd und ki auf fi senkrecht. Die gesuchten Coordinaten des Schnittes gfc setze man cf = t und fg = v; noch sey ca = α, der Winkel ecf = ω und der Neigungswinkel gfk = φ; so hat man in dem Dreyecke fgk

gf : gk = 1 : sin. gfk oder
v : z = 1 : sin. φ und
z = v. sin. φ; ferner
gf : fk = 1 : cos. gfk oder
v : fk = 1 : cos. φ und
fk = v. cos. φ.

Weiter ist der Winkel qkh = R − kqh = ecf = ω, und man hat

fk : fi = 1 : sin. fki oder
v. cos. φ : eh = 1 : sin. ω mithin
eh = v. cos. φ. sin. ω
fk : ki = 1 : cos. fki oder
v. cos. φ : ki = 1 : cos. ω. und
ki = v. cos. φ. cos. ω.

Endlich hat man in dem Dreyecke ecf

fc : ef = 1 : sin. ecf oder
t : ht = 1 : sin. φ und
hi = t. sin. φ
cf : ce = 1 : cos. ecf oder
t : ce = 1 : cos. ω und
ce = t. cos. ω.

Hieraus ergiebt sich

al = ce + eh = t. cos. ω + v. cos. φ. sin. ω = x, und

$lk = ik - ih - hl = v. \cos. \varphi. \cos. \omega - t.$
$\sin. \varphi - \alpha = y.$

Diese Werthe für x, y und z in die Gleichung der Fläche gesetzt, geben eine Gleichung zwischen den Coordinaten t und v für den schiefen Schnitt.

§. 382.

Aufgabe.

Es wird eine krumme Fläche von einer Ebene geschnitten, man soll den Halbmesser der Krümmung für einen jeden Punkt der krummen Linie finden, welche auf der schneidenden Ebene sich befindet.

Auflösung.

Es sey ab (F. 79.) die Grundfläche, cd die schneidende Ebene, auf welcher die krumme Linie fgh, welche von dem Schnitt herrühret, befindlich ist. Für den Punkt g soll der Halbmesser der Krümmung gesuchet werden. Nun sey gi senkrecht auf der Grundfläche, ce die Abscissenlinie, und ie senkrecht auf ce. Die Durchschnittslinie der schneidenden Ebene mit der Grundfläche ist ck und macht mit der Abscissenlinie den Winkel lce. Ferner ziehe man noch aus g die Linie gk auf die Durchschnittslinie ck senkrecht, so ist gki der Neigungswinkel der schneidenden Ebene gegen die Grundfläche. Man setze $mc = \alpha$, $me = x$, $ei = y$, $ig = z$, $lce = \varphi$ und $gki = \omega$, und man hat in dem rechtwinklichten Dreyecke cle

$ce : el = 1 : tang. lce$ oder
$x - \alpha : el = 1 : tang. \varphi$ und

$el =$

$el = (x - \alpha)$ tang. φ, folglich
$il = ie - le = y - (x - \alpha)$ tang. φ
Ferner $cl : ce = 1 : \text{cos. lce}$ oder
$cl : (x - \alpha) = 1 : \text{cos. } \varphi$ und
$cl = \frac{x - \alpha}{\text{cos. } \varphi}$.

Das Dreyeck ilk giebt weiter
$il : ik = 1 : \text{cos. lik}$ oder
$il : ik = 1 : \text{cos. lce}$ oder
$y - (x - \alpha)$ tan. $\varphi : ik = 1 : \text{cos. } \varphi$ und
$ik = (y - (x - \alpha) \text{ tang. } \varphi) \text{ cos. } \varphi$
$= y. \text{cos. } \varphi - (x - \alpha) \text{ tang. } \varphi. \text{ cos. } \varphi$
$= y. \text{cos. } \varphi - (x - \alpha) \text{ fin. } \varphi.$
Auch ist $li : lk = 1 : \text{fin. lce}$ oder
$(y - (x - \alpha) \text{ tang. } \varphi) : lk = 1 : \text{fin. } \varphi$ und
$lk = y \text{ fin. } \varphi - (x - \alpha) \text{ tang. } \varphi. \text{ fin. } \varphi.$
Aber $ck = cl + lk$ folglich

$$ck = \frac{x - \alpha}{\text{cos. } \varphi} + y \text{ fin. } \varphi - (x - \alpha) \text{ tan. } \varphi. \text{ fin. } \varphi$$

$$= y. \text{fin. } \varphi + (x - \alpha)\left(\frac{1}{\text{cos. } \varphi} - \text{tang. } \varphi. \text{ fin. } \varphi\right)$$

$$= y. \text{fin. } \varphi + (x - \alpha)\left(\frac{1}{\text{cos. } \varphi} - \frac{\text{fin. } \varphi^2}{\text{cos. } \varphi}\right)$$

$$= y. \text{ fin. } \varphi + (x - \alpha)\left(\frac{1 - \text{fin. } \varphi^2}{\text{cos. } \varphi}\right)$$

$$= y. \text{ fin. } \varphi + (x - \alpha)\left(\frac{\text{cos. } \varphi^2}{\text{cos. } \varphi}\right)$$

$$= y.$$

$$= y.\ \text{sin.}\ \varphi. + (x-\alpha)\ \text{cos.}\varphi.$$

In dem rechtwinklichten Dreyecke gik hat man ferner

$$gk : ki = 1 : \text{cos.}\ ikg \text{ oder}$$

$$gk : (y.\ \text{cos.}\ \varphi - (x-\alpha)\ \text{sin.}\ \varphi) = 1 : \text{cos.}\ \omega \text{ und}$$

$$gk = \frac{y\ \text{cos.}\varphi - (x-\alpha).\ \text{sin.}\varphi}{\text{cos.}\ \omega}.$$

Endlich hat man auch

$$ki : ig = 1 : \text{tang}\ gki \text{ oder}$$

$$y.\text{cos.}\ \varphi - (x-\alpha)\ \text{sin.}\ \varphi : ig = 1 : \text{tang.}\omega \text{ und}$$

$$ig = y.\ \text{cos.}\ \varphi.\ \text{tang.}\ \omega - (x-\alpha)\ \text{sin.}\ \varphi.\ \text{tang.}\ \omega = z.$$

Hier ist nun z eine Funktion von x und y, also kann man setzen

$$dz = \beta dy + \gamma dx$$

wo βdy das Differenzial der Funktion z in Ansehung des y allein, und γdx das Differenzial der nemlichen Funktion in Ansehung des x allein, (§. 496. der Algeb.). In dem obigen für z gefundenen Werthe sind die Winkel φ und ω beständig, folglich auch cos. φ, tang ω, und es ist

$$dz = \beta dy + \gamma dx = dy.\ \text{cos.}\ \varphi.\ \text{tang.}\ \omega - dx\ \text{sin.}\ \varphi.\ \text{tang.}\ \omega \text{ oder}$$

$$(\gamma + \text{sin.}\ \varphi.\ \text{tang.}\ \omega)\ dx = (\text{cos.}\ \varphi.\ \text{tan}\ \omega - \beta)\ dy \text{ und}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\gamma + \text{sin.}\ \varphi\ \text{tang.}\ \omega}{\text{cos.}\ \varphi.\ \text{tang.}\ \omega - \beta}.$$

Die Coordinaten für den Schnitt seyn ck = t und kg = v, und der Halbmesser der Krümmung für den Punkt g = ϱ, so ist

$\varrho =$

$$\varrho = \frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{-q}$$

wo $p = \frac{dv}{dt}$ und $q = \frac{dp}{dt} = d\left(\frac{dv}{dt}\right) : dt$, also

$$\varrho = \frac{\left(1+\left(\frac{dv}{dt}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{-d\left(\frac{dv}{dt}\right) : dt}.$$

Es ist aber $ck = t = y.\sin\varphi + (x-\alpha)\cos.\varphi$, folglich

$$dt = dy\ \sin\varphi + dx.\cos.\varphi;$$

ferner $kg = v = \frac{y.\cos.\varphi - (x-\alpha)\sin.\varphi}{\cos\omega}$ und

$$dv = \frac{dy.\cos.\varphi - dx.\sin.\varphi}{\cos.\omega};$$ mithin

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dy.\cos\varphi - dx.\sin\varphi}{(dy.\sin\varphi + dx.\cos.\varphi)\cos.\omega}$$

$$= \frac{\frac{dy}{dx}.\cos.\varphi - \sin.\varphi}{\left(\frac{dy}{dx}.\sin.\varphi + \cos.\varphi\right)\cos.\omega}$$

und statt $\frac{dy}{dx}$ oben gefundenen Werth gesetzet

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\gamma.\cos.\varphi + \beta\sin.\varphi}{\sin.\omega + (\gamma\sin.\varphi - \beta.\cos.\varphi)\cos.\omega}.$$

Hier-

Hieraus ergiebt sich ferner

$$d\left(\frac{dv}{dt}\right) : dt = \frac{\sin.\omega\,(d\gamma.\cos.\varphi + d\beta \sin.\varphi) + \cos.\omega\,(\gamma d\beta - \beta d\gamma)}{dt\,(\sin.\omega + (\gamma.\sin.\varphi - \beta.\cos.\varphi)\cos.\omega)^2}$$

Es war $dz = \beta dy + \gamma dx$, mithin

$$d\beta = \lambda dy + \mu dx$$
$$d\gamma = \mu dy + \varepsilon dx \text{ (§. 497. Algeb.)}$$

und man erhält

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{\lambda dy + \mu dx}{dy.\sin.\varphi + dx\cos.\varphi} \text{ oder}$$

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{\lambda \frac{dy}{dx} + \mu}{\frac{dy}{dx}\sin.\varphi + \cos.\varphi}$$

und statt $\frac{dy}{dx}$ obigen Werth gesetzet

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{\lambda\,(\sin.\varphi.\,\text{tang.}\,\omega + \gamma) + \mu(\cos.\varphi.\,\text{tang.}\,\omega\,\beta)}{\text{tang.}\,\omega + \gamma\sin.\varphi - \beta.\cos.\varphi}$$

Ferner ist

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{\mu dy + \varepsilon dx}{dy\sin.\varphi + dx\cos.\varphi} \text{ oder}$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{\mu \frac{dy}{dx} + \varepsilon}{\frac{dy}{dx}.\sin.\varphi + \cos.\varphi}$$

und auch hier statt $\frac{dy}{dx}$ dessen Werth gesetzet

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{\mu(\sin.\varphi \tang.\omega + \gamma) + \varepsilon(\cos.\varphi.\tang.\omega - \beta)}{\tang.\omega + \gamma.\sin.\varphi - \beta.\cos.\varphi.}$$

Wenn alle diese Werthe von $\frac{d\beta}{dt}$ und $\frac{d\gamma}{dt}$ in den Ausdruck für $d(\frac{dv}{dt}) : dt$ gesetzet werden, so ergiebt sich

$$\frac{(\sin.\omega\sin.\varphi + \gamma\cos.\omega)(\sin.\varphi.\tang.\omega + \gamma)\lambda + (\cos.\varphi\tang.\omega - \beta)\mu) + ((\sin\omega\cos\varphi - \beta\cos.\omega)(\sin.\varphi.\tang.\omega + \gamma)\mu + (\cos.\varphi\tang.\omega - \beta)\varepsilon)}{(\cos.\omega)^2(\tang.\omega + \gamma\sin.\varphi - \beta\cos.\varphi)^2.}$$

Setzet man endlich in dem Ausdrucke

$$\varrho = \frac{(1 + (\frac{dv}{dt})^2)^{\frac{3}{2}}}{-d(\frac{dv}{dt}) : dt}$$

die Werthe von $(\frac{dv}{dt})^2$ und von $d(\frac{dv}{dt}) : dt$, so ergiebt

$$\varrho = -\frac{((\cos.\omega)^2(\tang.\omega + \gamma\sin.\varphi - \beta\cos.\varphi)^2 + (\gamma\cos.\varphi + \beta\sin.\varphi)^2)^{\frac{3}{2}}}{((\sin.\omega.\sin.\varphi + \gamma.\cos.\omega)(\sin.\varphi\tang.\omega + \gamma)\lambda + (\cos.\varphi\tang.\omega - \beta)\mu) + ((\sin.\omega\cos.\varphi - \beta\cos.\omega)(\sin.\varphi.\tang\omega + \gamma)\mu + (\cos.\varphi\tang.\omega - \beta)\varepsilon).}$$

§. 383.

Aufgabe.

Es schneidet eine Ebene eine krumme Fläche man soll den Halbmesser der Krümmung des Schnit tes finden, welcher auf der krummen Fläche senk recht ist.

Auflösung.

Es seyn mig (Fig. 80.) und gip zwey Schnitte auf der Grundfläche senkrecht, und die Durch schnittslinie mi des erstern mit der Grundfläche sey mit der Abscissenlinie me parallel und die Durch schnittslinie ip des andern falle mit der Applikate ei = y zusammen.

Wenn sich nun z verändert jedoch so, daß es beständig in der schneidenden Ebene mig bleibet, so verändert sich y nicht, indem mi parallel mit me, und weil z eine Funktion von x und y ist, so ist das Differenzial von z nur in Absicht des x zu nehmen, mithin $dz = \delta dx$. Verändert sich hingegen z in dem Schnitte gip, so bleibt x be ständig, und es ist $dz = \beta dy$. Für die beyden Schnitte gim und gip ziehe man die Normalen gn und gf, so ist die Subnormale $in = z\frac{dz}{dx}$, und, weil $dz = \delta dx$, mithin $\frac{dz}{dx} = \delta$, $in = \delta z$; und die Subnormale $if = z.\frac{dz}{dx}$, oder, weil $dz = \beta dy$, folglich $\frac{dz}{dx} = \beta$, $if = \beta z$. Durch die Punkte f und n

zieht

ziehe man fq mit in und nq mit if parallel, die Linie gq wird senkrecht auf beyden Schnitten glp und gim seyn. Denn es ist gq die Durchschnittslinie der beyden Ebenen gnq und gqf, und weil die Ebene gnq senkrecht auf gm, und die Ebene gqf senkrecht auf gp, mithin gq senkrecht auf beyden Schnitten. Zieht man iq so ist das Dreyeck iqn bey n rechtwinklicht, und man hat

$$iq^2 = in^2 + nq^2 = in^2 + if^2$$
$$= \gamma^2 z^2 + \beta^2 z^2.$$

Ferner ist auch das Dreyeck giq rechtwinklicht, folglich

$$gq^2 = gi^2 + iq^2$$
$$= z^2 + \gamma^2 z^2 + \beta^2 z^2 \text{ und}$$
$$gq = z\sqrt{(1 + \gamma^2 + \beta^2)}.$$

Alle Schnitte also, welche durch den Punkt g auf der krummen Fläche senkrecht sind, haben die Linie gq zur Normallinie. Wäre demnach cq die Durchschnittslinie einer schneidenden Ebene mit der Grundfläche, welche auf der krummen Fläche senkrecht ist so muß selbige durch den Punkt q gehen. Aus i und f ziehe man ik und fd auf cq und fh auf ik senkrecht, so erhält man die beyden rechtwinklichten Dreyecke fdq und fhi, und es ist

gf : fd = 1 : sin. fqd (= sin. qce) oder
in : fd = 1 : sin. qce oder
γz : fd = 1 : sin. φ und
fd = γz. sin φ.

Ferner ist wegen Aehnlichkeit der Dreyecke lce, fld und ifh der Winkel fih = dem Winkel lce = φ, und man hat

fi : ih = 1 : cosin. φ oder
βz : ih = 1 : cosin φ

oder weil fi der Linie ei entgegen gesetzet ist, wenn if von i an gerechnet wird

$$-\beta z : ih = 1 : \text{cosin.}\,\varphi \text{ und}$$
$$ih = -\beta z \,\text{cosin.}\,\varphi.$$

Es ist also $ik = ih + hk = ih + fd$
$= \gamma z \,\text{sin.}\,\varphi - \beta z \,\text{cosin.}\,\varphi$

Man ziehe noch die Linie gk, welche auf cq senkrecht seyn wird, folglich ist auch der Winkel gki der Neigungswinkel der schneidenden Ebene gqc gegen die Grundfläche und $= \omega$, und es ergiebt sich

$$ki : ig = 1 : \text{tang.}\,gki \text{ oder}$$
$$\gamma z \,\text{sin.}\,\varphi - \beta z \,\text{cof.}\,\varphi : ig = 1 : \text{tang.}\,\omega \text{ und}$$
$$ig = (\gamma z \,\text{sin.}\,\varphi - \beta z \,\text{cof.}\,\varphi)\,\text{tang.}\,\omega \text{ oder}$$
$$z = (\gamma z \,\text{sin.}\,\varphi - \beta z \,\text{cof.}\,\varphi)\,\text{tang.}\,\omega \text{ oder}$$
$$1 = (\gamma \,\text{sin.}\,\varphi - \beta \,\text{cof.}\,\varphi)\,\text{tang.}\,\omega \text{ und}$$

$$\text{tang.}\,\omega = \frac{1}{\gamma \,\text{sin.}\,\varphi - \beta \,\text{cof.}\,\varphi}.$$

Nun ist $\text{sin.}\,\omega = \frac{\text{tang.}\,\omega}{\sqrt{(1 + \text{tang.}\,\omega^2)}}$ (§. 146.)

folglich

$$\text{sin.}\,\omega = \frac{1}{\gamma \,\text{sin.}\,\varphi - \beta \,\text{cof.}\,\varphi} : \sqrt{\left(1 + \frac{1}{(\gamma \,\text{si.}\,\varphi - \beta \,\text{cof.}\,\varphi)^2}\right)}$$
$$= \frac{1}{\gamma \,\text{sin.}\,\varphi - \beta \,\text{cof.}\,\varphi} : \sqrt{\frac{(\gamma \,\text{si.}\,\varphi - \beta \,\text{cof.}\,\varphi)^2 + 1}{(\gamma \,\text{si.}\,\varphi - \beta \,\text{cof.}\,\varphi)^2}}$$
$$= \frac{1}{\gamma \,\text{sin.}\,\varphi - \beta \,\text{cof.}\,\varphi} : \frac{\sqrt{((\gamma \,\text{si}\,\varphi - \beta \,\text{cof.}\,\varphi)^2 + 1)}}{\gamma \,\text{sin.}\,\varphi - \beta \,\text{cof.}\,\varphi}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{((\gamma \,\text{sin.}\,\varphi - \beta \,\text{cof.}\,\varphi)^2 + 1)}}$$

Ferner ist $\text{cof.}\,\omega^2 = 1 - \text{sin.}\,\omega^2$, folglich auch

$$\text{cof.}\,\omega^2 = 1 - \frac{1}{(\gamma \,\text{sin.}\,\varphi - \beta \,\text{cof.}\,\varphi)^2 + 1}$$
$$=$$

$$= \frac{(\gamma \sin.\varphi - \beta.\cos.\varphi)^2}{(\gamma \sin.\varphi - \beta.\cos.\varphi)^2 + 1} \text{ und}$$

$$\cos.\omega = \frac{\gamma \sin.\varphi - \beta.\cos.\varphi}{V((\gamma \sin.\varphi - \beta \cos.\varphi)^2 + 1)}.$$

Diese Werthe von tang. ω, sin. ω, und cos. ω in en Ausdruck des vorigen §. gesetzt geben den ver- ngten Halbmesser der Krümmung.

$$\varrho = \frac{-(1 + (\gamma \sin.\varphi - \beta.\cos.\varphi)^2)(1 + \beta^2\gamma^2)^{\frac{3}{2}}}{((1+\gamma^2)\sin\varphi\,\gamma\beta\cos.\varphi)((1+\gamma^2\sin.\varphi\,\gamma\beta \cos\varphi)\lambda + ((+\beta^2)\cos.\varphi - \gamma\beta.\sin.\varphi)\mu) + ((1+\gamma^2)\cos.\varphi - \gamma\beta.\sin.\varphi)((1+\gamma^2)\sin.\varphi\,\gamma\beta \cos.\varphi)\mu + ((1+\beta^2)\cos.\varphi - \gamma\beta.\sin.\varphi)\varepsilon).}$$

§. 384.

Zusatz.

Gesetzt, es sollte der Halbmesser der Krüm- ung für den Schnitt giq gesuchet werden, so elle man sich vor, es drehe sich die schneidende bene gqc so, daß die Durchschnittslinie cq durch en Punkt i gehe; in diesem Falle wird ik = o. un war

ik = $\gamma z \sin.\varphi - \beta z \cos.\varphi$, folglich

o = $\gamma z \sin.\varphi - \beta z.\cos.\varphi$ und

o = $\gamma \sin.\varphi - \beta.\cos.\varphi$ oder

$\gamma \sin.\varphi = \beta.\cos.\varphi = \beta V(1 - \sin.\varphi^2)$.

ieraus findet man

$$\sin.\varphi = \frac{\beta}{V(\gamma^2 + \beta^2)}.$$

Eben so ist auch

$\gamma V(1 - \cos.\varphi^2) = \beta.\cos.\varphi$ und

$$\text{cos. } \varphi = \frac{\gamma}{\sqrt{(\beta^2+\gamma^2)}}.$$

Setzt man diese Werthe von sin. φ und cos. φ i die Formel des vorigen §. so ergiebt sich der Hal messer der Krümmung

$$\varrho = \frac{-((\alpha^2+\gamma^2)(1+\beta^2+\gamma^2))^{\frac{3}{2}}}{\beta^3\lambda + 2\beta\gamma\mu + \gamma^2\varepsilon}.$$

§. 385.

Aufgabe.

Es soll gqi der Hauptschnitt unter allen seyn welche durch den Punkt g auf der Fläche senkrech stehen, man sucht die Krümmung der übrigen, wenn der Winkel bekannt ist, welchen sie mit dem Hauptschnitte machen.

Auflösung.

Es sey ri auf der Ebene des Hauptschnitts gqi senkrecht, und if auf gq perpendikulär. Zie man noch die Linie rf, so ist auch rf auf gq sen recht, mithin der Winkel rfi der Neigungswink der schneidenden Ebene gqc gegen den Haup schnitt giq, Welcher gegeben seyn soll und η bedeu ten kann. Es war $qi = z\sqrt{(\gamma^2+\beta^2)}$ und

$$gq = z\sqrt{(1+\gamma^2+\beta^2)}.$$

Kürze halber setze man $\sqrt{(\gamma^2+\beta^2)} = t$ und $\sqrt{(1+\gamma^2+\beta^2)} = v$, so ist

$$qi = zt \text{ und } gq = zv.$$

Die beyden rechtwinklichten Dreyecke giq und qi geben

$gq : gi = 1 : \text{sin. } gqi$ und
$iq : if = 1 : \text{sin. } gqi$, folglich auch
$gq : gi = iq : if$ oder
$zv : z = zt : if$ oder
$v : 1 = zt : if$ und
$if = \frac{zt}{v}$.

In dem rechtwinklichten Dreyecke fir hat man ferner
$fi : ir = 1 : \text{tang. } ifr$ oder
$\frac{zt}{v} : ir = 1 : \text{tang. } \eta$ und
$ir = \frac{zt}{v} : \text{tang. } \eta$.

Weiter ist in dem rechtwinklichten Dreyecke riq
$rq^2 = qi^2 + ri^2$ oder
$rq^2 = z^2t^2 + \frac{z^2t^2}{v^2} . \text{tang. } \eta^2$
$= \frac{z^2t^2}{v^2} (v^2 + \text{tang. } \eta^2)$ und
$rq = \frac{zt}{v} \sqrt{(v^2 + \text{tang. } \eta^2)}$.

Auch hat man
$rq : ri = 1 : \text{sin. } iqr$ und
$rq : iq = 1 : \text{cos. } iqr$ oder
$\frac{zt}{v} \sqrt{(v^2 + \text{tang. } \eta^2)} : \frac{zt}{v} \text{tang. } \eta = 1 : \text{sin. } iqr$ und
$\frac{zt}{v} \sqrt{(v^2 + \text{tang. } \eta^2)} : zt = 1 : \text{cos. } iqr$

folglich

$$\text{sin. iqr} = \frac{\text{tang. } \eta}{\sqrt{(v^2 + \text{tang. } \eta^2)}} \text{ und}$$

$$\text{cosi. iqr} = \frac{v}{\sqrt{(v^2 + \text{tang. } \eta^2)}}$$

$$\text{iq} : \text{fi} = 1 : \text{sin. iqf und}$$

$$\text{iq} : \text{fq} = 1 : \text{cos. iqf oder}$$

$$\text{zt} : -\beta z = 1 : \text{sin. iqf und}$$

$$\text{zt} : \quad \delta z = 1 : \text{cos. iqf also}$$

$$\text{sin. iqf} = -\frac{\beta}{t} \text{ und}$$

$$\text{cos. iqf} = \frac{\delta}{t}.$$

Nun ist aber der Winkel $\text{fqr} = \text{iqr} - \text{iqf} = \varphi$, mithin auch

$$\text{sin. } \varphi = \text{sin. (iqr} - \text{iqf)}$$

$$= \text{sin. iqr. cosin. iqf} - \text{cos. iqr. si. iqf}$$

$$= \frac{\delta \text{. tang. } \eta + v\beta}{t\sqrt{(v^2 + \text{tang } \eta^2)}} \text{ und}$$

$$\text{cos. } \varphi = \text{sin. ipr. sin. iqf} + \text{cos. iqr. cos. iqf}$$

$$= \frac{v\delta - \beta \text{ tang. } \eta}{t\sqrt{(v^2 + \text{tang. } \eta^2)}}$$

Setzt man diese Werthe von sin. φ und cos. φ in die gegebene Formel, so wird man die Krümmung desjenigen Schnittes finden, welcher auf der Fläche senkrecht ist, und welcher mit dem Hauptschnitte den Winkel η macht.

§. 386.

Erklärung.

Es können sich krumme Flächen einander schneiden, wie z. E. eine Kugelfläche und Kegelfläche

fläche; der Schnitt wird alsdenn mehrentheils eine solche krumme Linie, deren Theile nicht in einerley Ebene liegen, sondern beständig aus einer Ebene in eine andere kommen. Eine solche krumme Linie nennt man eine doppelt gekrümmte Linie. Die orthographische Projektion dieser krummen Linie in der Grundfläche ist eine krumme Linie, und die Punkte derselben liegen über dieser Projektion, nicht in einer Ebene sondern in einer krummen Fläche.

§. 387.

Zusatz.

In der doppelt gekrümmten Linie hi (Fig. 81.) lasse man von dem Punkte h die Linie hf auf die Fundamentalebene ab senkrecht herab, und ziehe fd auf die Abscissenlinie cc perpendikulär, so wird der Punkt h durch die drey Coordinaten hf = z, fd = y und cd = x bestimmt. Nimmt man mehrere dergleichen Punkte wie i in der doppelt gekrümmten Linie an, und zieht zu allen diesen Punkten wie vorhin die Coordinaten, und es findet zwischen x und y und zwischen y und z beständig die nemliche Gleichung statt, so bestimmen beyde Gleichungen die Natur der doppelt gekrümmten Linie.

Es sey ferner die Ebene kl auf der Grundfläche ab senkrecht, und die Abscissenlinie ec sey auf dieser Ebene normal. Aus irgend einem Punkte wie h in der doppelt gekrümmten Linie hi lasse man auf die Ebene kl die senkrechte Linie hn

fallen, und ziehe nm perpendikular auf nm; verfährt man auf diese Weise mit mehreren Punkten in der doppelt gekrümmten Linie, so erhält man in der Ebene kl wiederum eine orthographische Projektion der doppelt gekrümmten Linie, wie auf der Grundfläche. Uebrigens ist klar, daß nm = hf = z, und cm = df = y ist.

Wäre nun die Natur beyder Projektionen fg und on bekannt, so hat man alsdenn zwey Gleichungen, die eine zwischen cd und df oder x und y und die andere zwischen cm und mn oder y und z, und diese beyden Gleichungen bestimmen die Natur der doppelt gekrümmten Linie. Es sey z. E. fg ein Stück von einer Parabel, wo $y^2 = ax$ und on ein Stück von einem Kreise, wo $z^2 = a^2 - y^2$; machet man also $y = \sqrt{ax}$ oder $df = \sqrt{a.cd}$ und $z = \sqrt{(a^2 - y^2)}$ oder $mn = \sqrt{(a^2 - cm^2)}$, und ziehet durch f und n die Linien fh und nh jene mit mn und diese mit cd parallel, so ist der Punkt h in der doppelt gekrümmten Linie völlig bestimmt.

§. 388.

Aufgabe.

Die Subtangente einer doppelt gekrümmten Linie zu finden.

Auflösung.

Es sey ofg (F. 82) die orthographische Projektion der doppelt gekrümmten Linie phi in welcher für den Punkt h die Subtangente gesuchet wird. Die Projektion dieses Punktes h ist der Punkt f und

für

für diesen Punkt f sey kf die Tangente. Noch ziehe man aus einem andern Punkte i der doppelt gekrümmten Linie ig senkrecht auf die Grundfläche ab, folglich mit hf parallel, so werden hf und ig in einerley Ebene liegen. Durch die beyden Punkte i und h so wohl als auch durch g und f ziehe man die Linien il und gl, welche in der Ebene der Parallelen hf und ig liegen, und einander irgendwo in l schneiden, wenn sie nicht unter einander parallel sind. Endlich sey hn mit lg parallel, so hat man wegen der Aehnlichkeit der Dreyecke lfh und hni

$$in : nh = hf : fl \text{ oder}$$
$$in : fg = hf : fl.$$

Rückt nun der Punkt i dem Punkte immer näher, mithin ig der Linie hf, so nähert sich auch hl der hk und fl der fk; in dem verschwindenden Zustande von ni ist wirklich $fl = fk$ und $hl = hk$. Setzt man also $of = f$, so ist in dem verschwindenden Zustande $fg = df$ und $ni = dz$, und man hat

$$dz : df = z : fk \text{ und daher}$$
$$fk = z.\frac{df}{dz} =$$

der verlangten Subtangente

Es sey z. E. wie im vorigen §. $y^2 = ax$ und $z^2 = a^2 - y^2$, folglich auch $z^2 = a^2 - ax$ und $ax = a^2 - z^2$. Hieraus findet man

$$adx = -2zdz \text{ und}$$
$$dx = \frac{-2zdz}{a}.$$

Weil nun $df = \sqrt{(dy^2 + dx^2)}$ seyn muß, so wird hier

$$dx^2 = \frac{4z^2dz^2}{a^2} \text{ und}$$

$$dx^2 + dy^2 = \frac{4z^2dz^2}{a^2} + dy^2$$

aber $y^2 = a^2 - z^2$, mithin

$$2ydy = -2zdz \text{ oder}$$

$$ydy = -zdz$$

$$y^2dy^2 = z^2dz^2 \text{ und}$$

$$dy^2 = \frac{z^2dz^2}{y^2}, \text{ mithin}$$

$$dx^2 + dy^2 = \frac{4z^2dz^2}{a^2} + \frac{z^2dz^2}{y^2} \text{ und}$$

$$\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \sqrt{\left(\frac{4z^2dz^2}{a^2} + \frac{z^2dz^2}{y^2}\right)}$$

$$= zdz\sqrt{\left(\frac{4}{a^2} + \frac{1}{y^2}\right)}$$

$$= zdz\sqrt{\left(\frac{4y^2 + a^2}{a^2y^2}\right)}$$

$$= \frac{zdz}{ay}\sqrt{(4y^2 + a^2)}, \text{ folglich}$$

$$\frac{df}{dz} = \frac{z}{ay}\sqrt{(4y^2 + a^2)} \text{ und}$$

$$z.\frac{df}{dz} = \frac{z^2}{ay}\sqrt{(4y^2 + a^2)}.$$

§. 389.

Aufgabe.

Die Subnormale einer doppelt gekrümmten Linie zu finden.

Auflösung.

Wenn hq auf die Tangente kh senkrecht gesetzet wird, so ist selbige die Normale, mithin fq die Subnormale. Weil also beyde Dreyecke kfh und hfq bey f rechtwinklicht sind, so ergiebt sich

$$kf : fh = fh : fk$$

$$z.\frac{df}{dz} : z = z : fk \text{ oder}$$

$$\frac{df}{dz} : 1 = z : fk, \text{ mithin}$$

$$fk = z.\frac{dz}{df}.$$

In dem vorigen Beyspiele war

$$z.\frac{df}{dz} = \frac{z^2}{ay}\sqrt{(4y^2+a^2)}, \text{ also wird}$$

$$z.\frac{dz}{df} = z.\frac{ay}{z\sqrt{(4y^2+a^2)}}$$

$$= \frac{ay}{\sqrt{(4y^2+a^2)}}.$$

Achtzehntes Kapitel.

Von solchen Linien, welche einander berühren.

§. 390.

Aufgabe.

Es ist die Gleichung für die krumme Linie bhia (Fig. 83.), deren Abscissenlinie ad ist, gegeben, es soll eine krumme Linie gefunden werden, welche alle Parabeln, die durch den Punkt a gehen, und deren Axen mit den Applikaten ef, gh u. s. parallel sind, berühret.

Auflösung.

Es seyn afc und ahc zwey Parabeln, welche einander unendlich nahe liegen, so wird der Durchschnittspunkt c beyder unendlich nahe liegender Parabeln der Berührungspunkt für eine jede Parabel wie afc seyn. Man nehme $ae = x$, $ef = y$, $ad = v$ und $dz = z$; das Verhältniß der Coordinaten zwischen x und y wird als gegeben angenommen, und das Verhältniß zwischen den Coordinaten v und z wird gesucht. In der Parabel hat man

$$ae^2 : ic^2 = ef : if \text{ oder}$$
$$ae^2 : ed^2 = ef : fe - ie \text{ oder}$$
$$x^2 : (v-x)^2 = y : (y-z) \text{ oder}$$
$$x^2 : v^2 - 2vx + x^2 = y : y - z, \text{ mithin}$$
$$x^2y -$$

$$x^2y - x^2z = v^2y - 2vxy + x^2y$$
$$-x^2z = v^2y - 2vxy \text{ oder}$$
$$x^2z = 2vxy - v^2y.$$

Diese Gleichung gehöret für alle Parabeln, welche durch den Punkt a gehen. Weil nun c der Durchschnittspunkt der unendlich nahe liegenden Parabeln ist, mithin auch die Coordinaten $ad = v$ und $dc = z$ völlig ungeändert bleiben, wenn gleich die Coordinaten $ae = x$ und $ef = y$ eine Aenderung leiden, so braucht man nur vorige Gleichung in Rücksicht des x und y zu differenziiren man erhält

$$2xzdx = 2vydx + 2vxdy - 2vydy \text{ oder}$$
$$xzdx = vydx + vxdy - vydy$$

und wenn statt z der Werth $\frac{2vxy - v^2y}{x^2}$ gesetzet

$$v = ad = \frac{2x^2dy - 2yxdx}{xdy - zydx}.$$

Aus der gegebenen Gleichung für die krumme Linie bhfa kann man dy in einer Funktion von dx suchen, Setzt man alsdenn diese in den Werth von ad, so erhält man einen Ausdruck, in welchem kein Differenzial mehr anzutreffen ist.

§. 391.

Zusatz.

Wäre bhfa eine halbe Ellipse, deren konjugirte Axe $= ab = a$ und deren große Axe $= 2a$, so ist die Gleichung für selbige, wenn die Abscissen aus dem Mittelpunkte genommen werden.

$$y'^2 = \frac{a^2}{4a^2}(a^2 - x^2)$$

=

$$= \frac{a^2 - x^2}{4} \text{ und}$$

$$4y'^2 = a^2 - x^2.$$

Hier sind nun die Applikaten y um $\frac{1}{2}a$ größer als die Applikaten y', so daß $y = y' + \frac{1}{2}a$ oder

$y' = y - \frac{1}{2}a$, mithin

$y'^2 = y^2 - ay + \frac{1}{4}a^2$ oder

$4y'^2 = 4y^2 - 4ay + a^2$; demnach erhält man

$4y^2 - 4ay + a^2 = a^2 - x^2$ und

$x^2 = 4ay - 4y^2$; also

$2xdx = 4ady - 8ydy$ oder

$xdx = 2ady - 4ydy$ und

$$dy = \frac{xdx}{2a - 4y}.$$

Setzt man diesen Werth von dy in die Gleichung

$$ad = \frac{2x^2dy - 2yxdx}{xdy - 2ydx}, \text{ so erhält man}$$

$$ad = v = \frac{ax}{y} \text{ oder}$$

$$yv = ax$$

und hieraus erhält man folgende Proportion

$$y : x = a : v.$$

Sucht man also zu ef, ae und ab die vierte Proportionallinie ad, so kann man in d die Linie dc senkrecht auf ad aufrichten, welche die Parabel aic im gesuchten Punkte schneiden wird.

Sucht man ferner eine Gleichung zwischen ad und dc oder zwischen v und z, so zeigt selbige die Beschaffenheit der krummen Linie, welche alle Parabeln

abeln in einem Punkte wie c berühret. Zu dem Ende setze man in der Gleichung $x^2z = 2vxy - y$ statt v den gleichen Werth $\frac{ax}{y}$, so bekommt man $y = \frac{a^2}{2a-z}$ und daher

$$y = \frac{yv}{a} = \frac{av}{2a-z}.$$

Substituiret man diese Werthe von x und y in die Gleichung

$x^2 = 4ay - 4y^2$, so ergiebt sich

$v^2 = 4a^2 - 4az$.

Diese Gleichung zeigt also, daß die verlangte krumme Linie eine Parabel ist, deren Axe = ab, der Scheitelpunkt b, der Brennpunkt a folglich der Parameter = 4ab.

§. 392.

Zusatz.

Aus der Gleichung $y = \frac{a^2}{2a-z}$ erhält man

$$z = \frac{2ay - a^2}{y}.$$

Wäre also $2y > a$, so wird z positiv, wäre aber $2y < a$ oder $2y = a$ so wird im ersten Falle z negativ und im andern = 0 d. h. es kann der berührende Punkt c theils über, theils unter und theils in der Abscissenlinie ad fallen.

§. 393.

§. 393.

Zusatz.

Man ziehe die Linie ac und durch den Punk
f die Linie fk mit ad parallel, so wird alsdenn fl=
bk und l der Brennpunkt der Parabel afc seyn
Denn man hat

$$ad : dc = ae : el \text{ oder}$$

$$\frac{ax}{y} : \frac{2ay - a^2}{y} = x : el \text{ und}$$

$$el = 2y - a, \text{ mithin}$$

$$fl = fe - le = y - (2y - a) = a - y$$

Es ist aber $bk = ba - ka = ba - fe = a - y$
folglich

$$fl = bk.$$

Bedeutet ferner p den Parameter der Parabel
afc, so ist

$$ae^2 = p.\ ef \text{ oder}$$

$$x^2 = p.\ y \text{ und}$$

$$\frac{x^2}{y} = p$$

aber $x^2 = 4ay - 4y^2$, mithin auch

$$4a - 4y = p.$$

Weil nun $fl = a - y$, folglich der 4te Theil des
Parameters, so folget, daß l der Brennpunkt der
Parabel afc ist.

§. 394.

Aufgabe.

Es ist die Gleichung für die krumme Linie
acg (Fig. 84.) gegeben, man sucht eine andere
krumme

krumme Linie ke so daß bc = be, bc aber eine Applikate von ac und be senkrecht auf ke ist.

Auflösung.

Man gedenke sich auf der Abscissenlinie kf unendlich viele unendlich nahe liegender Punkte wie b, f, und beschreibe aus selbigen mit den Halbmessern be = bc, ef = fg, Kreise, so sieht man leicht, daß alle diese unendlich nahe liegenden Kreise die verlangte krumme Linie berühren müssen und daß der berührende Punkt e da ist, wo der mit dem Halbmesser be beschriebene Kreis von dem mit dem Halbmesser fe beschriebene und jenem unendlich nahe liegenden geschnitten wird. Aus dem Punkte e ziehe man ed auf af senkrecht, und setze ab = x, bc = be = y, ad = v und de = z; das Verhältniß zwischen den Coordinaten x und y ist bekannt, und man sucht das Verhältniß zwischen den Coordinaten v und z. In dem rechtwinklichten Dreyecke deb hat man

$$be^2 = de^2 + db^2 \text{ oder}$$
$$y^2 = z^2 + (x-v)^2$$
$$= z^2 + x^2 - 2vx + v^2.$$

Diese Gleichung ist für alle Kreise gemeinschaftlich. Weil nun die beyden Coordinaten v und z beständig bleiben, wenn sich gleich die beyden Coordinaten x und y ändern, so differenziire man jene Gleichung in Rücksicht des x und y, und man findet

$$2ydy = 2xdx - 2vdx \text{ oder}$$
$$ydy = xdx - vdx \text{ mithin}$$
$$x - v = \frac{ydy}{dx} = db.$$

Man ziehe für den Punkt c die Normale ch, s
ist bh die Subnormale also $= y\frac{dy}{dx}$, folglich db=
bh. Man hat also nur nöthig für den Punkt
die Normale ch zu ziehen, die Subnormale b
aus b nach d zu tragen und aus dem Punkte
die Linie de senkrecht aufzusetzen; der Kreis mi
dem Halbmesser be beschrieben wird de in dem
Punkte e schneiden, welcher zur verlangten krum
men Linie gehöret.

§. 395.

Zusatz.

Es sey ac eine Parabel, worinn $y^2 = ax$,
so ist die Subnormale $= \frac{1}{2}a$, mithin auch bd=
$\frac{1}{2}a$ oder $x - v = \frac{1}{2}a$ und $x = \frac{1}{2}a + v$. Nun
ist ferner

$$be^2 = de^2 + db^2 \text{ oder}$$
$$y^2 = z^2 + (\tfrac{1}{2}a)^2 = z^2 + \tfrac{1}{4}a^2$$

mithin auch, wenn die Werthe von x und y^2 in
die Gleichung $y^2 = ax$ gesetzet werden

$$z^2 + \tfrac{1}{4}a^2 = a(\tfrac{1}{2}a + v)$$
$$z^2 + \tfrac{1}{4}a^2 = \tfrac{1}{2}a^2 + av \text{ oder}$$
$$z^2 = av + \tfrac{1}{4}a^2$$
$$= a(\tfrac{1}{4}a + v)$$

oder, wenn $\frac{1}{4}a + v = t$

$$z^2 = at.$$

Es ist also die gesuchte krumme Linie ke ebenfalls
eine Parabel, welche der gegebenen ac völlig gleich
und ähnlich ist, weil beyde den nemlichen Para-
meter haben.

§. 396.

§. 396.

Aufgabe.

Es ist die Lage einer geraden Linie ab (Fig. 85.) auf der Abscissenlinie cf nebst der Gleichung der krummen Linie agh gegeben, und die Applikaten eg, fh laufen mit der Linie ab parallel, auch sind die Linien gk und hi mit cf parallel, man sucht eine krumme Linie da, welche alle die geraden Linien ed, fd, die durch die Punkte e, k und f, i gezogen werden, berühret.

Auflösung.

Es seyn die beyden Punkte e und f unendlich nahe an einander, so werden auch die Tangenten ed und fd unendlich nahe seyn, und sich in dem Punkte d schneiden. Von diesem Punkte d ziehe man die Linie dc mit ab parallel und nehme ae=x, eg=y=ak, ac=v, und ed=z. Weil dc mit ka parallel ist, so hat man

$$ea : ak = ec : cd \text{ oder}$$

$$x : y = x + v : z \text{ und}$$

$$z = y + \frac{vy}{x}.$$

Nimmt man nun v und z als unverändert an, wenn gleich x und y sich ändern, so wird das Differenzial

$$o = dy + \frac{xvdy}{x^2} - \frac{vxdx}{x^2}, \text{ folglich}$$

$$\frac{-x^2dy}{xdy - ydx} = v \text{ oder}$$

$$\frac{x^2dy}{ydx-xdy} = v.$$

Man ziehe für den Punkt g die Tangente gl, so ist el die Subtangente und $= y.\frac{dx}{dy}$. Ferner ist

$$al = le - ae = y.\frac{dx}{dy} - x = \frac{ydx-xdy}{dy}.$$ Nun

suche man zu al und ae die dritte Proportionallinie, man findet

al : ae = ae : t oder

$$\frac{ydx-xdy}{dy} : x = x : t,$$ folglich

$$t = \frac{x^2dy}{ydx-xdy} = v.$$

Man braucht also nur diese dritte Proportionallinie aus a nach c zu tragen und cd mit ab parallel zu ziehen, so wird der Punkt, wo sich die beyden Linien cd und ed schneiden in der verlangten Linie da liegen.

§. 397.

Zusatz.

Es sey die krumme Linie ag eine Parabel, worinn $y^2 = ax$, so wird al = ae folglich auch ae = ae und der Punkt 1 fällt mit c zusammen. Nun ist

ea : ak = ec : cd oder

x : y = 2x : z und

$z = 2y$, folglich $y = \frac{z}{2}$.

Diese

Diese Werthe von x und y in die Gleichung

$y^2 = ax$ gesetzt geben

$\frac{1}{4}z^2 = av$ und

$z^2 = 4av$.

Es ist demnach auch die krumme Linie ad eine Parabel, deren Parameter viermal größer ist, als der Parameter der Parabel agh.

§. 398.

Zusatz.

Es sey die gegebene krumme Linie cdg (Fig. 86.) ein Quadrante, dessen Mittelpunkt c, der Halbmesser $ac = ad = ag = a$, so sind die Linien ib, hf allemal dem Halbmesser gleich. Für den Punkt d ziehe man die Tangente dl, so hat man

$ab : ad = ad : al$ oder

$x : a = a : al$ und

$$al = \frac{a^2}{x}.$$

Vermöge der Auflösung des 396. §. ist

$al : ab = ab : am$ oder

$\frac{a^2}{x} : x = x : am$, mithin

$$am = \frac{x^3}{a^2}.$$

Weil mk mit mi parallel, so ergiebt sich

$ab : bi = am : ki$ oder

$x : a = \frac{x^3}{a^2} : ki$ und

$$ki = \frac{x^2}{a}, \text{ folglich}$$

$$kb = ib - ik = a - \frac{x^2}{a}.$$

Ferner ist $ib : ia = kb : km$ oder

$$a : y = a - \frac{x^2}{a} : z \text{ und}$$

$$z = \frac{a^2y - yx^2}{a^2} \text{ und}$$

$$a^2z = a^2y - yx^2$$
$$a^4z^2 = a^4y^2 - 2a^2y^2x^2 + y^4x^4.$$

Für den Kreis ist

$$a^2 - x^2 = y^2, \text{ folglich}$$
$$a^4z^2 = a^6 - a^4x^2 - 2a^4x^2 + 2a^2x^4 + a^2x^4 - x^6$$
$$a^4z^2 = a^6 - 3a^4x^2 + 3a^2x^4 - x^6 \text{ oder}$$
$$a^4z^2 = (a^2 - x^2)^3 \text{ und}$$
$$\sqrt[3]{a^4y^2} = a^2 - x^2.$$

Nun ist $v = \frac{x^3}{a^2}$, also

$$va^2 = x^3 \text{ und}$$
$$\sqrt[3]{a^2v} = x \text{ und}$$
$$\sqrt[3]{a^4v^2} = x^2; \text{ also hat man}$$
$$\sqrt[3]{a^4z^2} = a^2 - \sqrt[3]{a^4v^2} \text{ oder}$$
$$\sqrt[3]{a^4z^2} = a^2 - \sqrt[3]{a^4v^2}$$

und dies ist die Gleichung der krummen Linie ckg.

§. 399.

Aufgabe.

Es ist die Gleichung der krummen Linie ad (Fig. 87.) gegeben, und es seyn auf selbiger unendlich viele senkrechte Linien wie df, ef gezogen, man soll die krumme Linie if suchen, welche von den geraden Linien df, ef berühret wird.

Auflösung.

Es seyn df und ef zwey unendlich nahe liegende und auf der krummen Linie ae senkrechte Linien, welche sich in dem Punkte f schneiden. Aus diesem Punkte f ziehe man fg senkrecht auf die Abscissenlinie ag, und nehme $ab = x$, $bd = y$, $ag = v$, $gf = z$. Ferner ziehe man fh mit ag parallel und verlängere bd bis in den Durchschnittspunkt h, so ist $bg = ag - ab = v - x$, und $dh = y + z$, und die Subnormale $bk = y.\frac{dy}{dx}$. Weil nun bk mit hf parallel, so hat man

$$db : bk = dh : hf \text{ oder}$$

$$y : y.\frac{dy}{dx} = y + z : v - x \text{ und}$$

$$v - x = \frac{ydy + zdy}{dx}.$$

Nimmt man in dieser Gleichung v und z beständig, x und y aber veränderlich, so ist das Differenzial

$$-dx = \frac{yd^2y + dy^2 + zd^2y}{dx}$$

$$-dx^2 = yd^2y + dy^2 + zd^2y \text{ und}$$
$$-(dx^2 + dy) = (y+z)\,d^2y \text{ und}$$
$$y+z = \frac{dx^2+dy^2}{d^2y}.$$

Weil nun die Gleichung zwischen den Coordinaten x und y gegeben ist, so kann y+z in einer Function von x und y gefunden werden, und daraus läßt sich der Punkt f bestimmen. Man zieht nemlich durch den Punkt h die Linie hf mit ag parallel, und verlängert die Normale dk, welche hf in dem Punkte f begegnet, der ein Punkt der verlangten Linie ist.

Neunzehntes Kapitel.

Von der Variationsrechnung und einigen Anwendungen auf die Geometrie.

§. 400.

Erklärung.

Es sey kfhl (Fig. 88.) eine krumme Linie, wozu die Abscissen ab = x, ad = x′ und die Applikaten bf = y und dh = y′ gehören. Gesetzt nun es verändere sich das Verhältniß der Coordinaten x und y ein wenig, es sey aus welcher Ursache man wolle, so daß die krumme Linie kfl in die Lage mgin komme, und jener unendlich nahe ist. Aus den beyden Punkten g und i ziehe man die Applikaten gc und ie mit fb parallel, wozu die Abscissen

sciſſen ac und ae gehören, und ſetze $ac = X$, $ae = X'$, $cg = Y$ und $ei = Y'$. Hieraus erhält man

$$ad - ab = x' - x = \Delta x$$
$$dh - bf = y' - y = \Delta y$$
$$ae - ac = X' - X = \Delta X$$
$$ec - cg = Y' - Y = \Delta Y.$$

Auſſer dieſen endlichen Differenzen laſſen ſich aber auch noch die unendlich kleinen Differenzen zwiſchen den Abſciſſen ac und ab, ae und ad, und zwiſchen den dazu gehörigen Applikaten cg und bf, ei und dh betrachten. Dieſe unendlich kleinen Differenzen werden Variationen genennt. Um die Variationen anzudeuten, bedienet man ſich des Griegiſchen Buchſtabens δ. Man kann alſo ſetzen

$$ac - ab = X - x = \delta x$$
$$ae - ad = X' - x' = \delta x'$$
$$cg - bf = Y - y = \delta y.$$
$$ei - dh = Y' - y' = \delta y'.$$

§. 401.

Zuſatz.

Weil $X' - x' = \delta x'$ ſo iſt $X' = x' + \delta x'$
$Y' - y' = \delta y'$ — — $Y' = y' + \delta y$
$X' - X' = \Delta X$ — — $X = \Delta X + X$
$Y' - Y = \Delta Y$ — — $Y' = Y + \Delta Y$.

Hieraus ergiebt ſich alſo

$$\Delta X + X = x' + \delta x' \text{ und}$$
$$\Delta Y + Y = y' + \delta y'.$$

Weil ferner $Y - y = \delta y$, alſo auch $Y = y + \delta y$
$y' - y = \Delta y$ — — $y' = y + \Delta y$
ſo ſetze man in die vorige Gleichung ſtatt Y den

Werth $y+\delta y$ und statt y' den Werth $y+\Delta y$, und man erhält

$$\Delta(y+\delta y)+y+\delta y=y+\Delta y+\delta(y+\Delta y).$$

Nun ist $\Delta(y+\delta y)=\Delta y+\Delta\delta y$ und $\delta(y+\Delta y)=\delta y+\delta\Delta y$, demnach wird

$$\Delta y+\Delta\delta y+y+\delta y=y+\Delta y+\delta y+\delta\Delta y$$

oder

$$\Delta\delta y=\delta\Delta y \text{ d. h.}$$

Die Differenz der Variation ist gleich der Variation der Differenz.

§. 402.

Zusatz.

Weil ferner $\delta\Delta^2 y=\delta\Delta(\Delta y)=\Delta\delta\Delta y$, und $\delta\Delta y=\Delta\delta y$, so hat man auch $\delta\Delta^2 y=\Delta^2\delta y$

$\delta\Delta^3 y=\delta\Delta^2(\Delta y)=\Delta^2\delta\Delta y$; daher

$\delta\Delta^3 y=\Delta^3\delta y$.

Ueberhaupt also ist

$$\delta\Delta^n y=\Delta^n\delta y$$

d. h. die Variation der nten Differenz ist allemal der nten Differenz der Variation gleich.

§. 403.

Lehrsatz.

Die Variation der Summe einer Funktion ist gleich der Summe der Variation eben der Funktion.

Beweis.

Es sey $a'\ a''\ a'''\ a''''\ __$ a eine Reihe, in welcher das Glied a die Differenz aller vorhergehenden Glieder zusammen genommen seyn muß, mithin hat man

$a = \Delta(a' + a'' + a''' + a'''' __)$ und

$\Sigma a = a' + a'' + a''' + a'''' __$

$\delta\Sigma a = \delta(a' + a'' + a''' + a'''' __)$. Auch ist

$\delta a = \delta\Delta(a' + a'' + a''' + a'''' __)$ oder

$\delta a = \Delta\delta(a' + a'' + a''' + a'''' __)$, und

$\Sigma\delta a = \delta(a' + a'' + a''' + a'''' __)$; mithin

$\delta\Sigma a = \Sigma\delta a$.

§. 404.

Zusatz.

Es ist daher $\delta\Sigma^2 a = \delta\Sigma(\Sigma a) = \Sigma\delta\Sigma a = \Sigma\delta a$.
Eben so ist $\delta\Sigma^3 a = \delta\Sigma^2(\Sigma a) = \Sigma^2\delta\Sigma a = \Sigma^3\delta a$.
Ueberhaupt also wird $\delta\Sigma^n a = \Sigma^n \delta a$ seyn.

§. 405.

Zusatz.

Es ist leicht einzusehen, daß bey einer Differenzialfunktion von y

$\delta dy = d\delta y$

$\delta d^2 y = d^2 \delta y$

$\delta d^3 y = d^3 \delta y$ und überhaupt

$\delta d^n y = d^n \delta y$.

Auf eben diese Art hat man beym Integriren

$\delta \int ydy = \int \delta y dy$

$\delta \int^2 ydy = \int^2 \delta y dy^2$ und überhaupt

$\delta \int^n ydy^n = \int^n \delta y dy^n$.

§. 406.

Aufgabe.

Es ist eine Funktion gegeben, man soll di Variation derselben suchen.

Auflösung.

Die Variationen sind eine Art von Differen zialen. Sucht man also das Differenzial der ge gebenen Funktion und setzt anstatt des Zeichens d das Variationszeichen δ.

Es sey z. E. $z = xy$, so ist

$dy = xdy + ydx$, folglich auch

$\delta y = x\delta y + y\delta x$.

§. 407.

Zusatz.

Es kann in der Variationsrechnung eine Ap plikate variiren, wenn gleich die dazu gehörige Ab scisse unverändert bleibt. Auch kann nur ein Theil einer krummen Linie variiren; alsdenn können aber auch nur diejenigen Applikaten variiren, welche zu diesem Theile der krummen Linie gehören. Sollte z. E. x nicht variiren, so wird

$\delta z = x\delta y$.

§. 408.

Aufgabe.

Es sey z eine Funktion von x und y und der Verhältnisse $\frac{dy}{dx} = p, \frac{dp}{dx} = q, \frac{dq}{dx} = r$ u. s. f. man soll die Variation der Funktion finden.

Auf

Auflösung.

Weil z eine Funktion von x, y, p, q, r u. f. ist, so enthält das Differenzial dieser Funktion die Differenziale dieser veränderlichen Größen ein jedes Differenzial mit einer Funktion der nemlichen Größen multipliciret; demnach ist

$$dz = Adx + Bdy + Cdp + Ddq + Edr + \text{u. f.}$$

wo A, B, C, D, E u. f. lauter Funktionen von x, y, p, q, r u. f. sind. Sollen nun alle veränderliche Größen variiren, so erhält man

$$\delta z = A\delta x + B\delta y + C\delta p + D\delta q + E\delta r + \text{u. f.}$$

Ausserdem müssen nun noch die Werthe von δp, δq, δr u. f. gesuchet werden. Weil nun

$p = \frac{dy}{dx}$, so ist $\delta p = \frac{dx\delta dy - dy\delta dx}{dx^2} = \frac{\delta dy - p\delta dx}{dx}$

$q = \frac{dp}{dx}$, so ist $\delta q = \frac{dx\delta dp - dp\delta dx}{dx^2} = \frac{\delta dp - q\delta dx}{dx}$

$r = \frac{dq}{dx}$, so ist $\delta r = \frac{dx\delta dq - dq\delta dx}{dx^2} = \frac{\delta dq - r\delta dx}{dx}$

u. s. f.

§. 409.

Aufgabe.

Es ist eine unendliche Anzahl von krummen Linien von einerley Art wie aci (Fig. 89.) gegeben, welche alle von einer andern krummen Linie hc so geschnitten werden, daß die Winkel wie hci unter sich gleich groß sind, man sucht die Gleichung der krummen Linie hck.

Auf-

Auflösung.

Es sey af die Abscissenlinie und a der A fangspunkt derselben, so haben beyde krumme nien aci und kch für den Punkt c einerley Co dinaten, nemlich ab = x und bc = y. Für d Punkt c seyn cd und ce Tangenten der beyd krummen Linien. Wird der Punkt h dem Pu cte c unendlich nahe angenommen, so ist hg = d und cg = bf = dx, und man hat

gh : gc = cb : eb oder
dy : dx = y : eb oder
dx : dy = eb : y, aber
eb : y = 1 : tang. ceb, also
dx : dy = 1 : tang. ceb und
tang. ceb = $\frac{dy}{dx}$.

Es wird demnach tang. cda = $\frac{\delta y}{\delta x}$ seyn. We nun die Gleichung der krummen Linie aci gegebe ist, so suche man die Variation derselben, un man erhält den Werth von $\frac{\delta y}{\delta x}$. Der Winkel hc ist = hcg — icg = ceb — cdb, wovon der erst die Tangente $\frac{dy}{dx}$ und der andere die Tangente $\frac{\delta y}{\delta x}$ hat. Nun ist

$$\text{tang. (ceb} - \text{cdb)} = \frac{\text{tang. ceb} - \text{tang. cdb}}{1 + \text{tang. ceb, tang. cdb}},$$

folglich

tang.

$$\text{tang. hci} = \left(\frac{dy}{dx} - \frac{\delta y}{\delta x}\right) : \left(1 + \frac{dy}{dx} \cdot \frac{\delta y}{\delta x}\right).$$

Weil der Winkel hci beständig ist, so kann man setzen

$$\left(\frac{dy}{dx} - \frac{\delta y}{\delta x}\right) : \left(1 + \frac{dy}{dx} \cdot \frac{\delta y}{\delta x}\right) = \beta$$

$$\frac{dy}{dx} - \frac{\delta y}{\delta x} = \beta + \beta \cdot \frac{dy}{dx} \cdot \frac{\delta y}{\delta x}$$

$$\frac{dy}{dx} - \beta \frac{dy}{dx} \cdot \frac{\delta y}{\delta x} = \beta + \frac{\delta y}{\delta x} \text{ oder}$$

$$\left(1 - \beta \cdot \frac{\delta y}{\delta x}\right) \frac{dy}{dx} = \beta + \frac{\delta y}{\delta x}.$$

Aus dieser und aus der gegebenen Gleichung für die krumme Linie muß man den Parameter wegschaffen, da sodann eine Gleichung zwischen x und y erhalten wird, welche die Natur der gesuchten Linie ausdrücket.

Exempl. Es seyn alle Linien, welche in a ihren Anfang haben, gerade Linien deren Gleichung $y = \alpha x$, so hat man

$$\delta y = \alpha \delta x \text{ und}$$

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \alpha, \text{ folglich}$$

$$(1 - \alpha\beta) \frac{dy}{dx} = \beta + \alpha, \text{ oder}$$

$$\text{weil } \alpha = \frac{y}{x}$$

$$\left(1 - \frac{y}{x}\beta\right) \frac{dy}{dx} = \beta + \frac{y}{x} \text{ oder}$$

(x—

$$(x-y\beta)\frac{dy}{dx}=\beta x+y$$

$$(x-y\beta)\,dy=(\beta x+y)\,dx$$

und dies ist die Differenzialgleichung für die krumm Linie hck. Um selbige zu integriren, setze man

$y=vx$, mithin $dy=vdx+xdv$, un man hat

$(x-vx\beta)(vdx+xdv)=(\beta x+vx)\,dx$ ode

$(1-v\beta)(xdx+xdv)=(\beta+v)\,dx$ oder

$$\frac{\beta dx}{x}=\frac{dv}{1+v^2}=\frac{\beta v dv}{1+v^2}.$$

und hiervon ist das Integral

$\beta l.x=\mathfrak{A}$ tang. $v-\beta l\sqrt{(1+v^2)}+\beta l.m$

wo $\beta l.m$ die beständig willkührliche Größe andeutet, und deswegen diese Gestalt erhält, weil in dem Integrale ähnliche Größen darinn vorkommen. Aus dieser Gleichung findet man

$\beta l.x+\beta l.\sqrt{(1+v^2)}-\beta l.m=$ $\mathfrak{A}$. tang. v oder

$\beta(l.x+l.\sqrt{(1+v^2)}-l.m)=$ $\mathfrak{A}$. tang. v oder

$$\beta l.\left(\frac{\sqrt{(x^2\sqrt{(1+v^2)}}}{m}\right)=\mathfrak{A}.\text{ tang. }v$$

$$\beta l.\left(\frac{\sqrt{(x^2+v^2x^2)}}{m}\right)=\mathfrak{A}.\text{ tang. }v$$

und statt v den Werth $\frac{y}{x}$ gesetzet

$$\beta l.\left(\frac{\sqrt{(x^2+y^2)}}{m}\right)=\mathfrak{A}.\text{ tang. }\frac{y}{x}$$

und diese Gleichung gehöret zur logarithmischen Spirallinie. Es sey nemlich cb (Fig. 90.) $=x$

und

nd bd = y und der Bogen ea = φ, und cd = v
o hat man

$$\mu l.\ v = \varphi \text{ (§.)}$$

ber $v = \sqrt{(x^2+y^2)}$, und

$$x : y = 1 : \text{tang. } \varphi \text{ und}$$

$$\text{tang. } \varphi = \frac{y}{x} \text{ u. } \varphi = \mathfrak{A}.\text{tang.}\frac{y}{x}.$$

nithin wird

$$\mu l.\sqrt{(x^2+y^2)} = \mathfrak{A}.\ \text{tang.}\frac{y}{x}$$

elche Gleichung der vorhin gefundenen vollkom-
nen ähnlich ist.

§. 410.

Aufgabe.

Es ist wie im §. 408. z eine Funktion von
, y, p, q, r u. s. man soll die Variation von
. zdx finden.

Auflösung.

Es ist $\delta\int. zdx = \int.\delta zdx = \int(\delta zdx + zd\delta x)$
$= \int.\delta zdx + \int. zd\delta x$. Nun setze man $\int. zd\delta x =$
$\delta x + y$, so ist hiervon das Differenzial $zd\delta x =$
$dz\delta x + zd\delta x + dy$ oder $o = dz\delta x + dy$, und dy
$= -dz\delta x$, folglich $y = -\int. dz\delta x$ und daher $\int.$
$dd\delta x = z\delta x - \int. dz\delta x$. Hieraus ergiebt sich

$$\delta\int. zdx = z\delta x - \int dz\delta x + \int.\delta zdx$$
$$= z\delta x + (\int.\delta zdx - \int. dz\delta x)$$
$$= z\delta x + \int.(B(dx\delta y - dy\delta x) + C(dx\delta p - dp\delta x) + D(dx\delta x - dq\delta x) + \text{u. s.})$$

Setzet man der Kürze wegen

$\delta y - p\delta x = \vartheta y$, so ist

$dx\delta y - dy\delta x = dx\vartheta y$

$dx\delta p - dp\delta x = d\delta y - pd\delta x - dp\delta x$

$= d(\delta y - p\delta x)$

$= d\vartheta y$

$dx\delta q - dq\delta x = d\delta p - qd\delta x - db\delta x$

$= d(\delta p - qdx)$

$= d(\frac{1}{dx} d\vartheta y)$ u. f.

Hieraus wird

$\delta f.zdx = zdx + f.(Bdx\vartheta y + Cd\vartheta y + Dd(\frac{1}{dx} dy\vartheta y)$ + u. f.).

Ferner ist $f. Cd\vartheta y = C\vartheta y - f. dC\vartheta y$

$f. Dd(\frac{1}{dx} d.\vartheta y) = \frac{1}{dx} Dd\vartheta y - f.\frac{1}{dx} dDd\vartheta y$

$= \frac{1}{dx} Dd\vartheta y - \frac{1}{dx} dD\vartheta y + f.d(\frac{1}{dx}$ dD) ϑy.

Demnach wird

$\delta.f.zdx =$ einer Const. $+ zdx + (C - \frac{1}{dx} dD$ u. f.) ϑy

$+ (D - u. f.)\frac{1}{dx} d\vartheta y$

$+ f.((B - \frac{1}{dx} dC + \frac{1}{dx} d(\frac{1}{dx} dD) -$ u. f.) $dx\vartheta y$ u. f. u. f.

Setzt man alle Größen zusammengenommen, welche kein Integralzeichen vor sich haben, $= \pi$ und welche selbiges vor sich haben $= \Phi$, so wird $\delta. f. zdx =$ Const. $+ \pi + f. \Phi$.

§. 411.

§. 411.

Zusatz.

Soll $\int zdz$ ein Größtes oder Kleinstes seyn, so ist die Variation $= o$, folglich Const. $+ \pi +$ $\int \varphi = o$ oder $\pi + \int \varphi =$ Const., mithin $\pi =$ Const. wenn $\int \varphi = o$ ist. Wenn demnach der Werth von dem Integrale $\int \varphi$ beym Anfange $= \pi'$ gesetzet wird, so muß $\pi + \int \varphi = \pi'$ seyn. Giebt man dem Integrale $\int \varphi$ eine gewisse bestimmte Ausdehnung, und setzt den Werth von π am Ende dieses Integrals $= \pi''$ so wird das Größte oder Kleinste $\pi'' + \int \varphi = \pi'$. Man nehme an, es seyn beym Anfange des Integrals $\int \varphi$ die Werthe der Coordinaten x, y u. f. α, $= \beta$ u. f. und am Ende $= \mu$, $= \varrho$ u. f. Ausserdem kann nun noch die Funktion z die Werthe α, β u. f. μ, ϱ u. f. so wie selbst die Verhältnisse $\frac{d\beta}{d\alpha} = \beta'$; $\frac{d\beta}{d\alpha} = \beta''$ u. f. enthalten. Die Größen dieser Differenziale werden zwar beständig behandelt, jedoch werden aber hiervon die Variationen statt finden, es müssen also in ∂z folgende Sätze anzutreffen seyn $A\partial\alpha + B\partial\beta + C\partial\beta' + D\partial\beta''$ u. f. $+ F\partial\mu + G\partial\varrho + H\partial\varrho'$ u. f. wo A, B, C, D, F, G Funktionen von den Größen in z sind. Es wird also $\partial \int zdx$ folgende Sätze enthalten. $\partial\alpha \int Adx + \partial\beta \int Bdx +$ u. f. $+ \partial\mu \int Fdx + \partial\varrho \int Gdx +$ u. f. Gesetzt, es erhielten die Integrale $\int Adx$, $\int Bdx$, $\int Fdx$; $\int Gdx$ u. f. wenn sie $= o$ die Werthe A', B', C' G', u. f. für die Werthe der Coordinaten x und y u. f. $= \alpha$, $= \beta$ u. f. und zuletzt $= \mu$, $= \varrho$ u. f. so erhält man folgende Gleichung

$$\pi'' + \int.\Phi + F'\delta\mu + G'\delta\varrho + \text{u. f.}$$
$$= \pi'' - A'\delta\alpha - B\delta\beta - \text{u. f.}$$

Man nehme ferner an, die Funktionen z, B, C u. f. erhalten die Werthe z', B', C' u. f. wenn die Coordinaten x, y u. f die Werthe α und β u. f. erhalten; die nemlichen Funktionen erhalten aber die Werthe z'', B'', C'' u. f., wenn die Coordinaten die Werthe μ, ϱ u. f. erhalten, so erhält man die Gleichung für das Größte oder Kleinste

$$\int\Phi = (z' - A')\delta\alpha + (B' - \frac{1}{d\alpha} dC' + \frac{1}{d\alpha} d(\frac{1}{d\alpha}$$
$$dD') - \text{u. f.})\vartheta\beta - B'\delta\beta + \text{u. f.}$$
$$+ (C' - \frac{1}{d\alpha} dD' + \text{u. f.})\frac{1}{d\alpha} d\vartheta\beta - B''\delta\beta' + \text{u. f.}$$
$$+ (D' - \text{u. f.})\frac{1}{d\alpha} d(\frac{1}{d\alpha} d\vartheta\beta) - B'''\delta\beta'' + \text{u. f.}$$
$$- (z'' + F')\delta\mu - (B'' - \frac{1}{d\mu} dC'' + \frac{1}{d\mu} d(\frac{1}{d\mu} dD''$$
$$- \text{u. f.})\vartheta\varrho - \text{u. f.}$$
$$- (C'' - \frac{1}{d\mu} dD'' + \text{u. f.})\frac{1}{d\mu} d\vartheta\varrho - \text{u. f.}$$
$$- (D'' - \text{u. f.})\frac{1}{d\mu} d(\frac{1}{d\mu} d\vartheta\varrho) - \text{u. f.}$$

Zum ersten Punkte der krummen Linie, wo $\int.zdx$ ein Größtes oder ein Kleinstes wird, gehören die Coordinaten α, β u. f. zum folgenden Punkte gehören $\alpha + \delta\alpha$, $\beta + \delta\beta$ u. f. bis zum letzten Punkte wo die Coordinaten μ und ϱ u. f. sind. Weil nun die Variation eines jeden Punktes mit der Variation eines jeden folgenden Punktes nicht in Ver-

bin-

bindung ist, so muß die vorige Gleichung anfänglich $\varphi = 0$ geben, welches auch in der Folge des f. φ statt finden muß. Hieraus ergeben sich folgende Gleichungen, wovon die erstern zu den ersten Punkten und die letztern zu den letzten Puncten der krummen Linie gehören.

1. Gleichung.

$$(z' - \mathfrak{A}')\,\delta\alpha + (B' - \frac{1}{d\alpha}\,dC' + \frac{1}{d\alpha}\,d(\frac{1}{d\alpha}\,dD') - \text{u. f.})\,\vartheta\beta - \mathfrak{B}'\delta\beta + \text{u. f.} = 0.$$

2. Gleichung.

$$(C' - \frac{1}{d\alpha}\,dD' + \text{u. f.})\,\frac{1}{d\alpha}\,d\vartheta\beta - \mathfrak{B}''\delta\beta' + \text{u. f.} = 0$$

3. Gleichung.

$$(D' - \text{u. f.})\,\frac{1}{d\alpha}\,d(\frac{1}{d\alpha}\,d\vartheta\beta) - \mathfrak{B}'''\delta\beta'' + \text{u. f.} = 0$$

u. f. u. f.

1. Gleichung.

$$(z'' + \mathfrak{F}')\,\delta\mu - (B'' - \frac{1}{\delta\mu}\,dC'' + \frac{1}{d\mu}\,d(\frac{1}{d\mu}\,dD'') - \text{u. f.})\,\vartheta\varepsilon - \text{u. f.} = 0.$$

2. Gleichung.

$$(C'' - \frac{1}{d\mu}\,dD'' + \text{u. f.})\,\frac{1}{d\mu}\,d\vartheta\varepsilon - \text{u. f.} = 0.$$

3. Gleichung.

$$(D'' - \text{u. f.})\,\frac{1}{d\mu}\,d(\frac{1}{d\mu}\,d\vartheta\varepsilon) - \text{u. f.} = 0$$

u. f. u. f.

Wäre kein Verhältniß zwischen den Coordinaten x, y u. f. gegeben, so haben auch die Variationen der Koordinaten keine Beziehung gegen einander und man erhält für die Gleichung $\varphi = o$

$$B - \frac{1}{dx} dC + \frac{1}{dx}d\left(\frac{1}{dx} dD\right) - \frac{1}{dx} d\left(\frac{1}{dx} d\left(\frac{1}{dx} dE\right)\right) + u.f = o \text{ u. f. u. f.}$$

Findet aber ein Verhältniß zwischen den Coordinaten x, y u. f. statt, so muß man die Variationen δx und δy u. f. auf die möglichst kleinste Anzahl bringen, uud einen jeden Coefficienten = o setzen. Fände z. E. zwischen den beyden veränderlichen Größen x und y folgende Beziehung statt, so daß $\alpha dx + \beta dy = o$, so ist auch $\alpha \delta x + \beta \delta y = o$, und $\delta x = -\frac{\beta}{\alpha} \delta y$. Gesetzt es hätte die Gleichung $\varphi = o$ folgende Form

$\psi \vartheta x + \psi \vartheta y = o$, so setze man in

$\vartheta y = \delta y - p\delta x$ und

$\vartheta x = \delta x - p'\delta x$

den Werth von δx, so ergiebt sich

$$\psi(\delta x - p'\delta x) + \psi'(\delta y - p\delta x) = o \text{ oder}$$

$$\psi\left(-\frac{\beta}{\alpha}\delta y - p'\left(-\frac{\beta}{\alpha}\delta y\right) + \psi'\left(\delta y - p\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\delta y\right)\right) = o$$

$(\psi p'\beta - \psi\beta + \psi'\alpha + \psi' p\beta)\delta y = o$, folgl.

$\psi p'\beta - \psi\beta + \psi'\alpha + \psi' p\beta = o.$

§. 385.

Aufgabe.

Man soll von allen Vielecken, welche man aus einer gegebenen Anzahl von Seitenlinien machen

chen kann, dasjenige finden, welches die größte Fläche hat.

Auflösung.

Weil das zu suchende Vieleck unter allen Vielecken von gleich viel Seitenlinien die größte Fläche haben soll, so sey eines von diesen Vielecken $= p$, so wird das nächst größere $= p + \delta p$ seyn. Ist man auf diese Weise bis auf das größte gekommen, so muß die Variation desselben $= o$ seyn. Es sey also das größte $= \pi$, so hat man $\delta\pi = o$. Es seyn die Winkel des Vielecks die Winkel c, e, h u. s. (Fig. 91.), lasse aus selbigen auf die Abscissenlinie af die senkrechten Linien cb, ed, hf u. s. herab, setze $ad = x$, $de = y$, so ist $dt = eg = \Delta x$ und $gh = \Delta y$. Die Fläche des Trapezii edfh ist $=$

$$(fh + de) \cdot \tfrac{1}{2} ge$$
$$= (y + \Delta y + y) \cdot \tfrac{1}{2} \Delta x$$
$$= (y + \frac{\Delta y}{2}) \Delta x.$$

Weil nun das Vieleck aus lauter Trapezen bestehet, so muß der Flächeninhalt gleich seyn

$$\Sigma (y + \frac{\Delta y}{2}) \Delta x.$$

Weil nun selbige die größte seyn soll, so muß auch deren Variation $= o$ seyn mithin

$$\delta \Sigma (y + \frac{\Delta y}{2}) \Delta x = o.$$

Die Anzahl der Seitenlinien des Vielecks sind gegeben, folglich können selbige keine Variation haben. Für die Seitenlinie eh des Vielecks hat man

$$eh = \sqrt{(eg^2 + gh^2)}$$
$$= \sqrt{(\Delta y^2 + \Delta x^2)}.$$

Demnach ist $\delta\sqrt{(\Delta y^2 + \Delta x^2)} = 0$ oder

$$\delta(\Delta y^2 + \Delta x^2)^{\frac{1}{2}} = 0 \text{ oder}$$

$$\tfrac{1}{2}\delta(\Delta y^2 + \Delta x^2)^{-\frac{1}{2}}\delta(\Delta y^2 + \Delta x^2) = 0 \text{ od.}$$

$$\tfrac{1}{2}\delta(\Delta y^2 + \Delta x)^{-\frac{1}{2}}(\Delta y\delta\Delta y + 2\Delta x\delta\Delta x)$$

$= 0$ oder

$$\delta(\Delta y^2 + \Delta x^2)^{-\frac{1}{2}}(\Delta y\delta\Delta y + dx\delta\Delta x)$$

$= 0$ oder $\quad (\Delta y\delta\Delta y + \Delta x\delta\Delta x) = 0$ od.

$$\delta\Delta x = -\frac{\Delta y\delta\Delta y}{\Delta x}$$

Aus der Gleichung

$$\delta\Sigma.(y + \frac{\Delta y}{2})\Delta x = 0 \text{ erhält man}$$

$$\Sigma.\delta(y + \frac{\Delta y}{2})\Delta x = 0 \text{ oder}$$

$$\Sigma(\Delta x\delta y + y\delta\Delta x + \frac{\Delta y}{2}\delta\Delta x + \frac{\delta\Delta y}{y}.\Delta x) = 0 \text{ od.}$$

$$\Sigma(\Delta x\delta(y + \frac{\Delta y}{2}) + \delta\Delta x(y + \frac{\Delta y}{2})) = 0.$$

Nun setze man statt δdx den eben gefundenen Werth $-\frac{\Delta y}{\Delta x}\delta\Delta y$, so ist

$$\Sigma(\Delta x\delta y + \frac{\Delta x}{2}\delta\Delta y - (y + \frac{\Delta y}{2})(\frac{\Delta y}{\Delta x}\delta\Delta y)) = 0 \text{ od.}$$

$$\Sigma(\Delta x\delta y - (\frac{\Delta x}{2} - \frac{y\Delta y}{\Delta x} - \frac{\Delta y^2}{2\Delta x})\delta\Delta y) = 0.$$

Nimmt man $\frac{\Delta x}{2} - \frac{y\Delta y}{\Delta x} - \frac{\Delta y^2}{2\Delta x} = \varphi$. so wird

$\Sigma(\Delta x$

$\Sigma(\Delta x \delta y + \varphi \delta \Delta y) = 0$ oder
$\Sigma(\Delta x \delta y + \varphi \Delta \delta y) = 0.$

Es ist aber $\Sigma. \varphi \Delta \delta y = \varphi \delta y - \Sigma. \Delta \varphi^2 \delta y$, folglich erhält man

$\varphi \delta y - \Sigma \Delta(\varphi - x') \delta y = \text{Const.}$

die beständige Größe muß dasjenige werden, was $\varphi \delta y$ wird, wenn $\Sigma \Delta(\varphi - x) \delta y = 0$ ist. Bedeutet also α die Applikate y, welche zu diesem Punkte gehöret und A dasjenige was aus φ wird, so erhält man die Gleichung

$$\varphi \delta y - \Sigma \Delta(\varphi - x') \delta y = A \delta \alpha.$$

Giebt man nun dem Integral $\Sigma \Delta(\varphi - x') \delta y$ eine bestimmte Ausdehnung, und nimmt an daß β eine Applikate wird, welche zum Ende dieses Integrals gehöret, wenn B dasjenige bedeutet, was aus φ wird, so ist

$$B \delta \beta - \Sigma \Delta(\varphi - x') \delta y = A \delta \alpha.$$

Setzt man endlich, daß die Abscissenlinie das Vieleck so schneide, daß α und β Null sind, mithin auch $\delta \alpha$ und $\delta \beta = 0$, so wird die Gleichung

$\Sigma \Delta(\varphi - x') \delta y = 0$, welches also
$\varphi - x' = \text{Const.}$ giebt.

Setzt man nun statt φ den oben gefundenen Werth und statt x' den Werth $x + \Delta x$, so erhält man

$$\frac{\Delta x}{2} - \frac{y \Delta y}{\Delta x} - \frac{\Delta y^2}{2 \Delta x} - x - \Delta x = s \text{ oder}$$

$$x + \frac{\Delta x}{2} + \frac{y \Delta y}{\Delta x} + \frac{\Delta y^2}{2 \Delta x} + s = 0 \text{ und}$$

$$x \Delta x + \frac{\Delta x^2}{2} + y \Delta y + \frac{\Delta y^2}{2} - s \Delta x = 0$$

Sucht man endlich von jedem Satze die Summe so wird $x^2 + y^2 + 2sx = \mu^2$,

Diese Gleichung druckt einen Kreis aus, dess Mittelpunkt in der Abscissenlinie af liegt; folgli ist das verlangte Vieleck ein solches, welches i einem Kreise beschrieben werden kann.

§. 413.

Aufgabe.

Man soll die krumme Linie ac (Fig. 92.) fin den, so daß die Fläche cad, welche zwischen ac, de Evolute ad und dem Halbmesser der Krümmung c fällt, ein Kleinstes wird.

Auflösung.

Es sey ab = x, bc = y, und der Bogen ac nehme um das Stück ce zu, so ist der Flächen- inhalt von ed = $\frac{cd}{2}$. ce. Es ist aber ce als un endlich klein betrachtet = $V(cf^2 + fe^2) = V(dy^2 + dx^2)$, mithin das Flächenelement von acd = $\frac{cd}{2}V(dy^2 + dx^2)$. Nimmt man dx als beständig, so ist der Halbmesser der Krümmung cd = $\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{\mp dxd^2y}$ und daher das Flächenelement

$$= \frac{(dx^2+dy^2)^2}{\mp 2dxd^2y}.$$

Es ist also $\int \frac{dx(1+p^2)^2}{q}$ das Integral welches ein

Klein-

Kleinstes werden muß, mithin hier $z = \frac{(1+p^2)^2}{q}$ (§. 410.). Hieraus findet man

$$A = 0,\ B = 0$$

$$C = \frac{4p(1+p^2)}{q} \text{ und}$$

$$D = -\frac{(1+p^2)^2}{q^2} \text{ (§. 408.).}$$

Ferner giebt die Gleichung

$$B - \frac{1}{dx} dC + \frac{1}{dx^2} d^2D = 0 \text{ (§. 411.)}$$

$$\frac{1}{dx} dC = \frac{1}{dx} d^2D \text{ oder}$$

$$dC = \frac{1}{dx} d^2D \text{ und}$$

$$C = \frac{1}{dx} dD + \alpha$$

weil dx als beständig behandelt wird. Weiter ist hier $dz = Cdp + Ddq$ und wenn statt C eben gefundener Werth gesetzet wird

$$dz = \alpha dp + qdD + Ddq \text{ und daher}$$

$$z = \beta + \alpha p + qD \text{ oder}$$

$$\frac{(1+p^2)^2}{q} = \beta + \alpha p - q\frac{(1+p^2)^2}{q^2} \text{ und}$$

$$2(1+p^2)^2 = \beta q + \alpha pq \text{ und}$$

$$q = \frac{2(1+p^2)^2}{\beta + \alpha p}.$$

Ferner ist $q = \frac{dp}{dx}$; also auch

$$\frac{2(1+p^2)^2}{\alpha p+\beta} = \frac{dp}{dx}, \text{ und}$$

$$dx = \frac{(\beta+\alpha p)\,dp}{2(1+p^2)^2} \text{ und}$$

$$x = \gamma - \frac{\alpha-\beta p}{4(1+p^2)} + \frac{\beta}{4} \int \frac{dp}{1+p^2}$$

$$= \gamma - \frac{\alpha-\beta p}{4(1+p^2)} + \frac{\beta}{4} \text{ A. tang. p.}$$

Auch ist $p = \frac{dy}{dx}$ und

$$pdx = dy, \text{ folglich}$$

$$y = px - \int x\,dp$$

$$= px - \int \left(\gamma dp - \frac{(\alpha-\beta p)\,dp}{4(1+p^2)} + \frac{\beta}{4} \text{A. tang pdp}\right)$$

$$= px - \gamma p + \frac{\alpha}{4} \text{ A. tang. p} - \frac{\beta}{8} \text{l.}(1+p^2) - \frac{\beta}{4} (\text{p. A.}$$

$$\text{tang. p} - \tfrac{1}{2}\text{l.}(1+p^2)).$$

Demnach ist

$$x = \gamma - \frac{\alpha-\beta p}{4(1+p^2)} + \frac{\beta}{4} \text{A. tang. p und}$$

$$y = \delta - \frac{(\alpha-\beta p)\,p}{4(1+p^2)} + \frac{\alpha}{4} \text{. A. tang. p}$$

Aus diesen beyden Gleichungen schaffe man A. tang. p weg, man hat nemlich

$$\alpha x = \alpha\gamma - \frac{(\alpha-\beta p)\,\alpha}{4(1+p^2)} + \frac{\alpha\beta}{4} \text{A. tang. p und}$$

$\beta y =$

$\beta y = \beta\delta - \frac{(\alpha - \beta p)\, p\beta}{4(1+p^2)} + \frac{\alpha\beta}{4}$ A. tang. p und

$\alpha x - \beta y = \alpha\delta - \beta\delta - \frac{(\alpha - \beta p)^2}{4(1+p^2)}$ und

$\frac{(\alpha - \beta p)^2}{4(1+p^2)} = \alpha' - \alpha x + \beta y$

wenn $\alpha\gamma - \beta\delta = \alpha'$ gesetzet wird. Nun nehme man statt p den gleichen Werth $\frac{dy}{dx}$, so ergiebt sich

$$\frac{(\alpha - \beta\frac{dy}{dx})^2}{4(1+\frac{dy^2}{dx^2})} = \alpha' - \alpha x + \beta y \text{ oder}$$

$$\frac{\frac{(\alpha dx - \beta dy)^2}{dx^2}}{4(dx^2+dy^2)} = \alpha' - \alpha x + \beta y \text{ oder}$$

$$\frac{(\alpha dx - \beta dy)^2}{4(dx+dy^2)} = \alpha' - \alpha x + \beta y \text{ und}$$

$$\frac{(\alpha dx - \beta dy)^2}{4(\alpha' - \alpha x + \beta y)} = dx^2 + dy^2 \text{ und}$$

$$\frac{\alpha dx - \beta dy}{2\sqrt{(\alpha' - \alpha x + \beta y)}} = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = d(ac).$$

Hieraus findet man

$$ac = \beta' - \sqrt{(\alpha' - \alpha x + \beta y)}$$

und dies ist die gesuchte Gleichung der krummen Linie. Die vier willkührlichen beständigen Größen verlangen, daß die krumme Linie durch vier gegebene Punkte gehe. Daß aber diese Linie eine Cykloide sey, erhellet folgender Maassen:

Es sey der Durchmesser des erzeugenden Kreises al (Fig. 93) $= a$, $lf = v$, $fm = z$, $fd = z'$, der Bogen $ml = t$. Nun hat man im Kreise

$$z^2 = av - v^2, \text{ folglich}$$

$$2zdv = adv - 2vdv \text{ und}$$

$$dz = \frac{(a-2v)\,dv}{2\sqrt{(av-v^2)}} \text{ und}$$

$$dt = \frac{adv}{2(\sqrt{av}-v)}.$$

Weil ferner $md = ml = t$, so ist $fd = z' = z + t$, folglich $dz' = dz + dt$ oder $dz' = \frac{(a-2v)dv + adv}{2\sqrt{(av-v^2)}}$.

$$= \frac{2(a-v)\,dv}{2(av-v^2)}$$

$$= \frac{dv\sqrt{(a-v)}}{\sqrt{v}}.$$

Bedeutet nun der Bogen ld der Cykloide $= f$, so ist

$$\sqrt{(dv^2 + dz^2)} = df = \frac{dv\sqrt{a}}{\sqrt{v}}, \text{ mithin}$$

$$f = 2\sqrt{av}.$$

Man nehme nun eine gerade Linie in an, welche ah unter einem gewissen Winkel ω schneide, ziehe dg senkrecht auf hn, und setze $ie = x$ und $ed = y$, und die Linie $in = \varepsilon$. In beyden ähnlichen Dreyecken han und hge hat man

$$ha : he = hn : hg \text{ und}$$

$$ha : he = an : ge, \text{ folglich}$$

$$hg = \frac{he.hn}{ha} \text{ und}$$

ge=

$$ge = \frac{an.he}{ha}.$$

Nun ist $gd = ge + ed = \frac{an.he}{ha} + y$, und aus beyden ähnlichen Dreyecken fgd und han erhält man

$hn : an = gd : gf$ oder

$hn : an = \frac{an.he}{ha} + y : gf$, mithin

$$gf = \frac{an^2.he}{hn.ha} + \frac{an}{hn}.y.$$

Es ist aber $lf = hg - fg - hl$ und

$hl = ha - la$, folglich

$lf = hg - fg - ha + la$ oder

$$lf = \frac{he.hn}{ha} - \frac{an^2.he}{hn.ha} - \frac{an}{hn}.y - ha + \alpha$$

$$= \frac{he.(hn^2 - an^2)}{ha.hn} - \frac{an}{hn}.y - ha + \alpha$$

$$= \frac{he.ha^2}{ha.hn} - \frac{an}{hn}.y - ha + \alpha$$

$$= \frac{he.ha}{hn} - \frac{an}{hn}.y - ha + \alpha.$$

Ferner ist $he = hn - en$ und

$en = in - ie$, folglich

$he = hn - in + ie = hn - \varepsilon + x$.

Endlich hat man in dem rechtwinklichten Dreyecke ahn

$hn : ha = 1 : \text{cos.}\,\omega$ und

$hn : an = 1 : \text{sin.}\,\omega$ und

$$\text{cos.}\,\omega = \frac{ha}{hn}.$$

$$\text{sin. } \omega = \frac{an}{hn}, \text{ mithin}$$

$$v = \alpha + (x - \varepsilon) \text{ cos. } \omega - y \text{ sin. } \omega.$$

Es wird also für die Gleichung der Cykloide

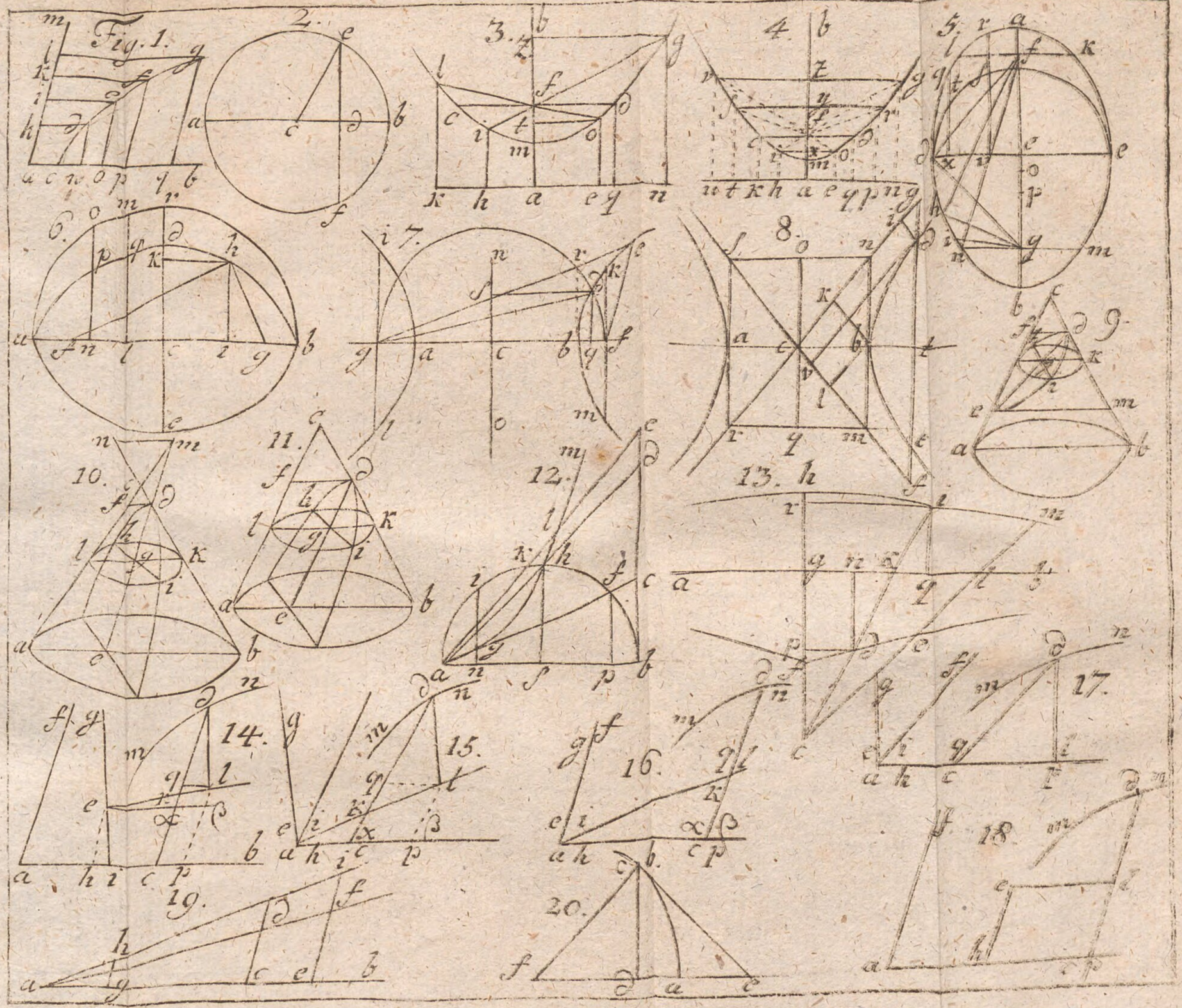
$$f = 2\sqrt{\alpha}\sqrt{(\alpha + (x - \varepsilon) \text{ cos. } \omega - y \text{ sin. } \omega)}.$$

Ist die gerade Linie hn mit ha parallel, so ist sin. $\omega = 0$, und cos. $\omega = 1$ also wird die Gleichung der Cykloide

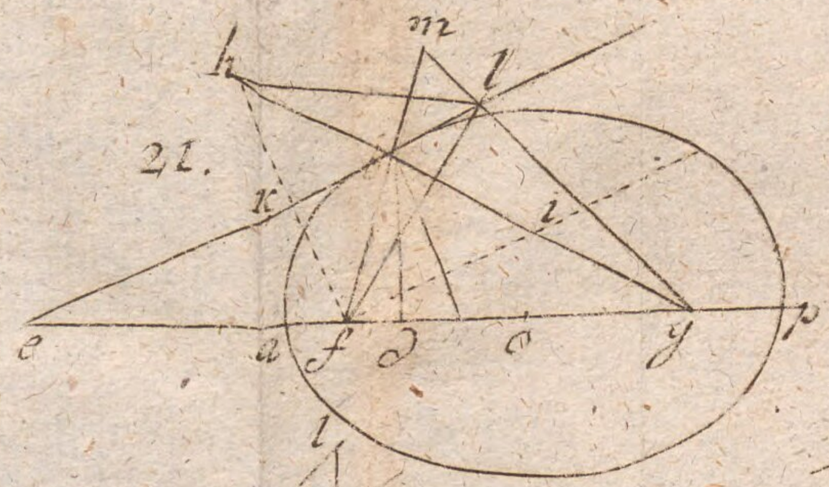
$$f = 2\sqrt{\alpha}\sqrt{(\alpha - x - \varepsilon)}.$$

Diese Gleichung ist derjenigen vollkommen ähnlich, welche in der Auflösung gefunden ist.

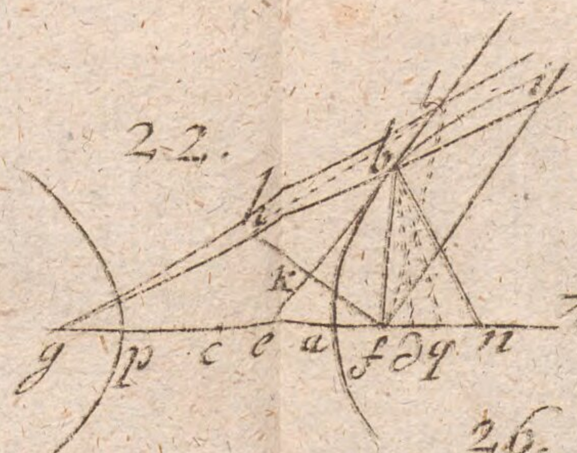
Tab. I.



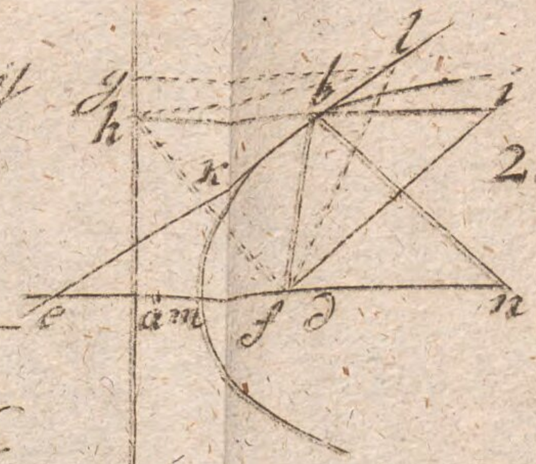
21.



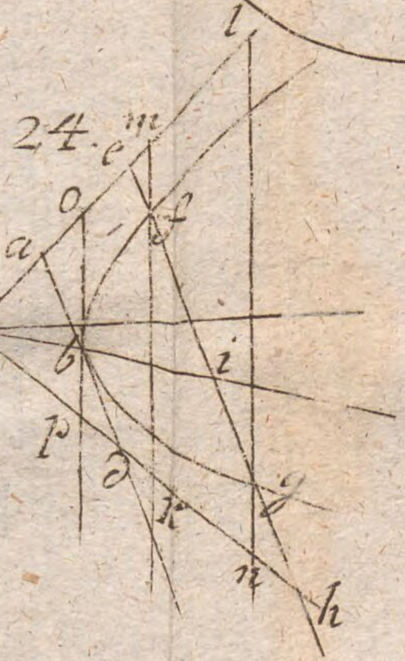
22.



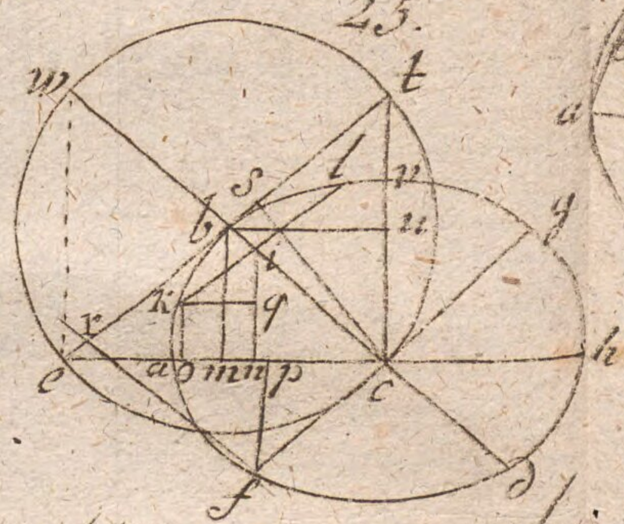
23



24.

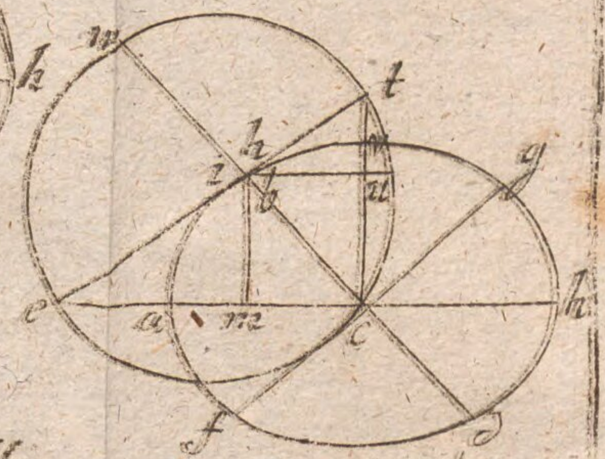


25.

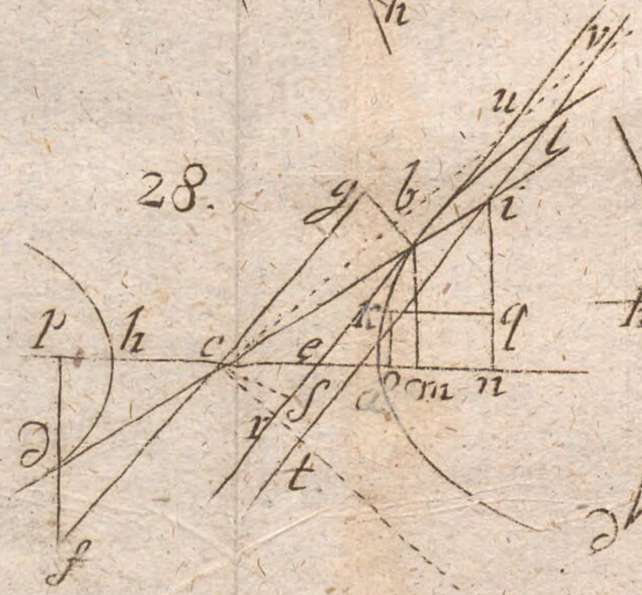


26.

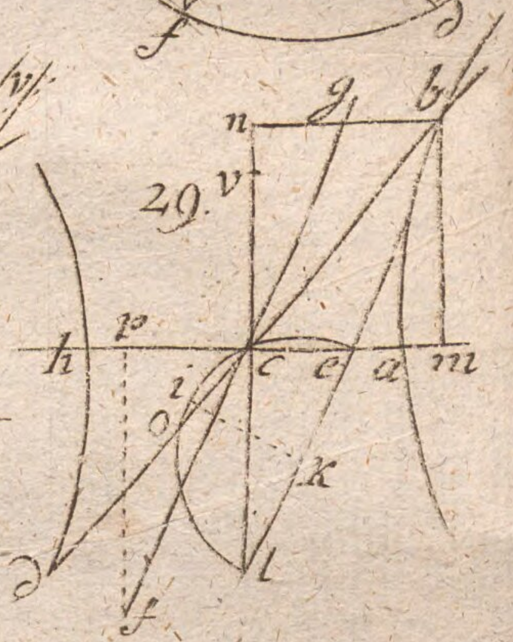
27.



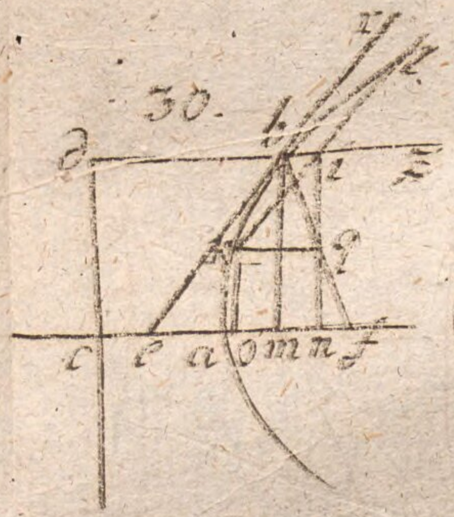
28.



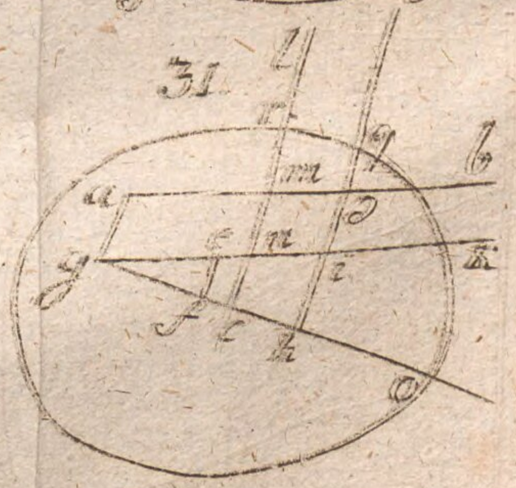
29.

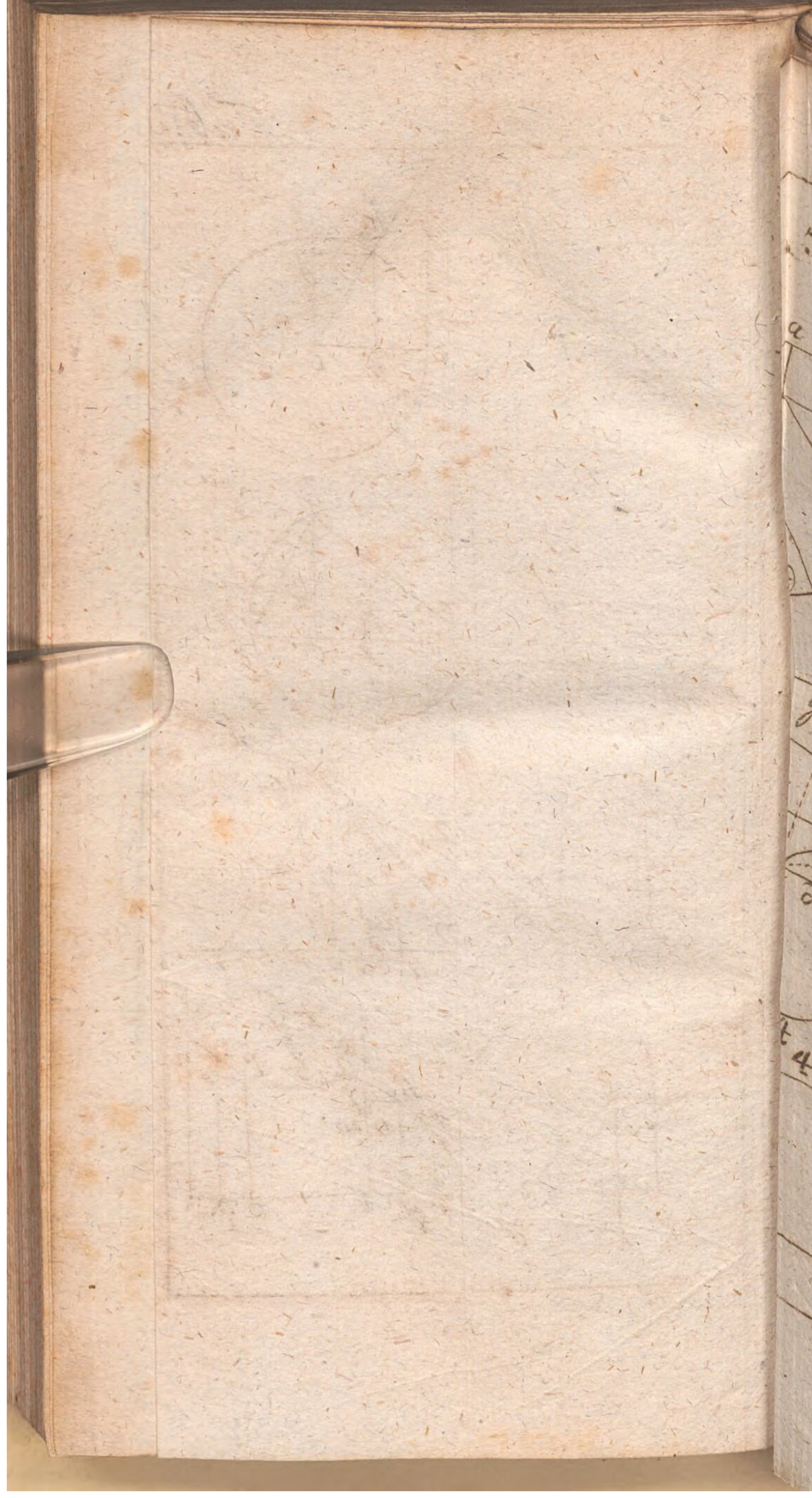


30.



31.





32.

33.

34.

35.

36.

37.

38.

39.

40.

41.

42.

43.

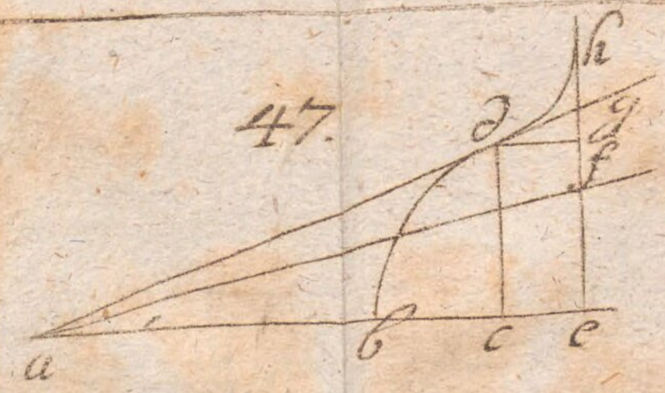
44.

45.

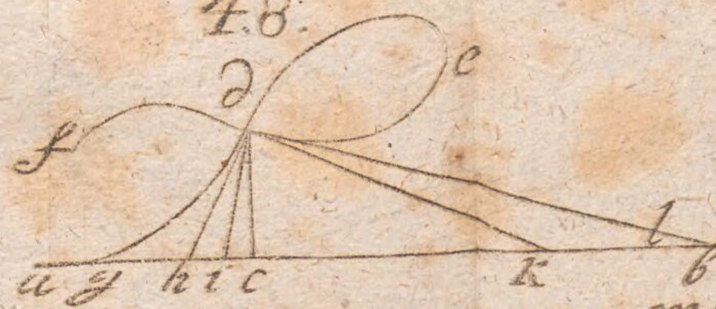
46.

Tab. IV.

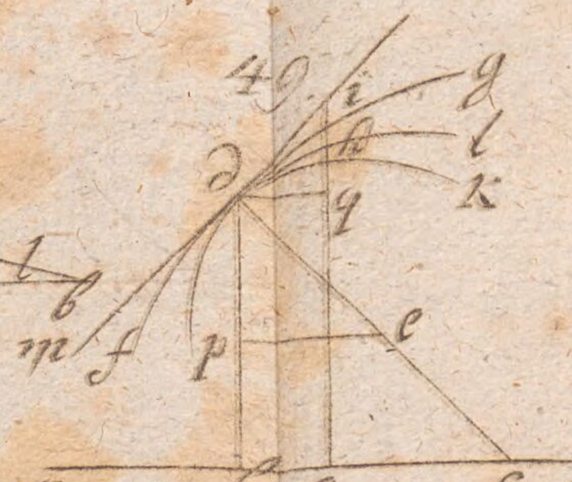
47.



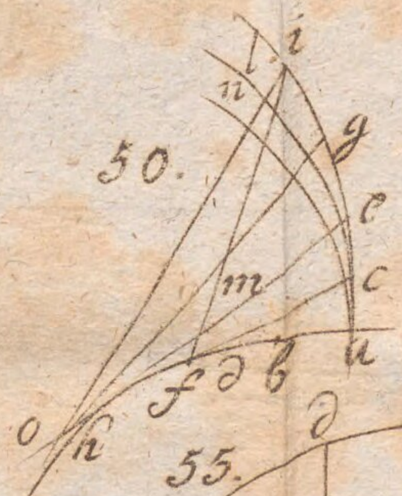
48.



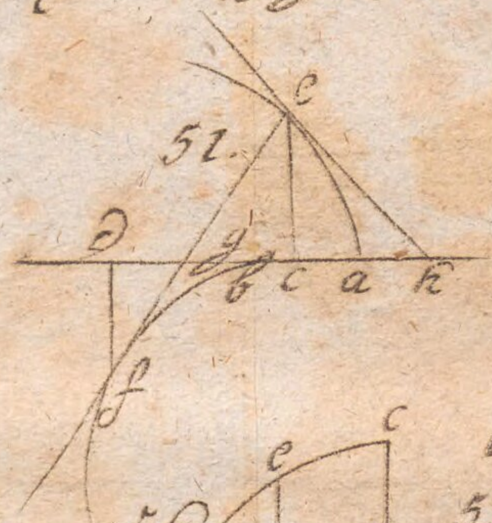
49.



50.

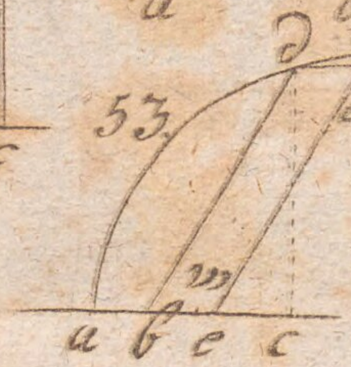


51.

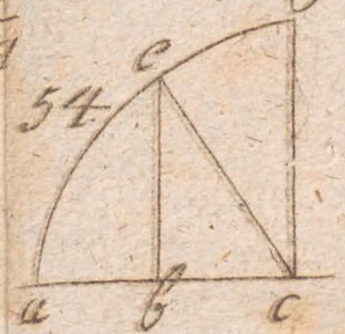


52.

53.

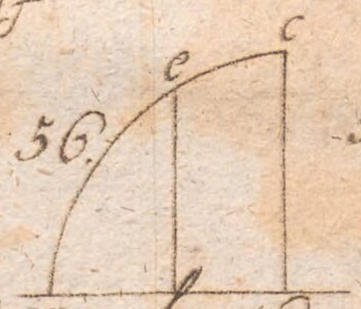


54.

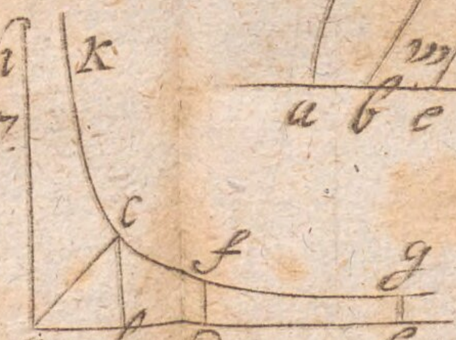


55.

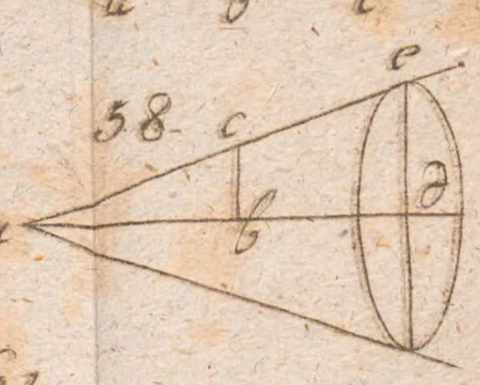
56.



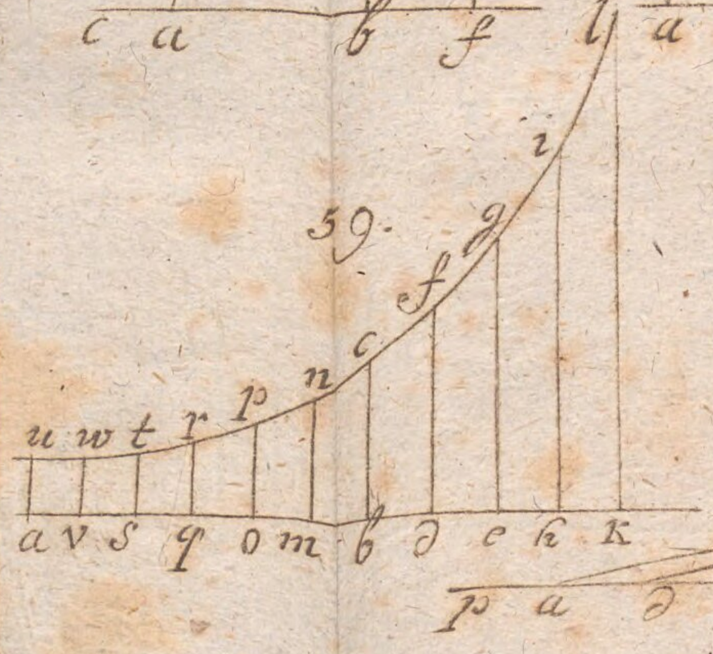
57.



58.

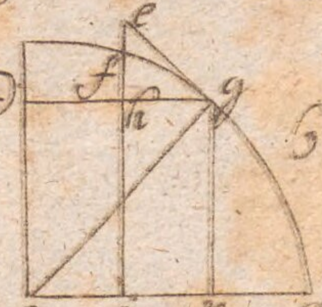


59.

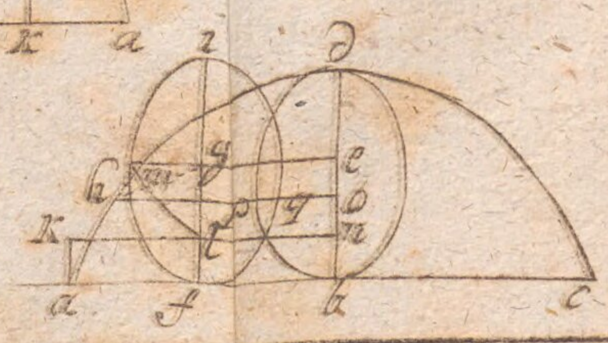


60.

61.

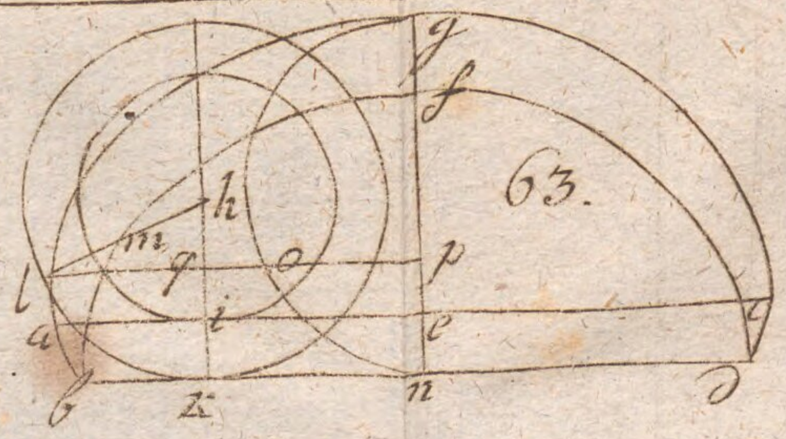


62.

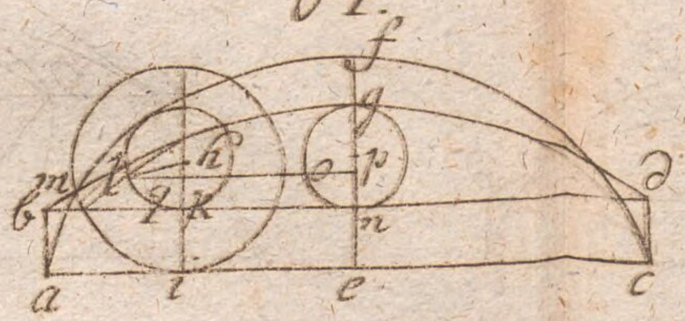


Tab. V.

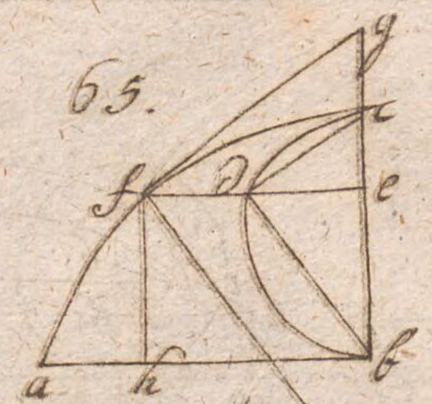
63.



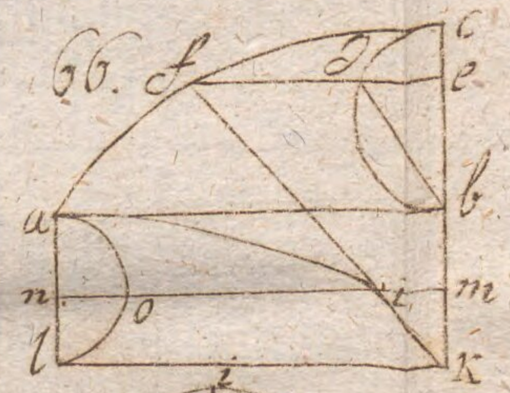
64.



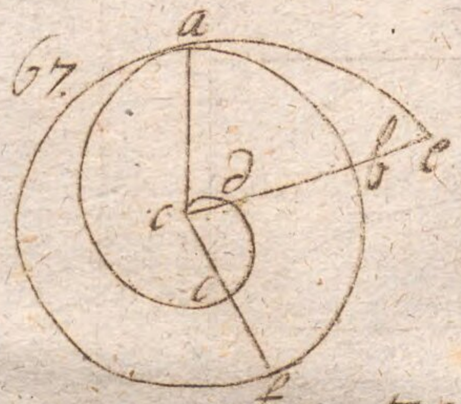
65.



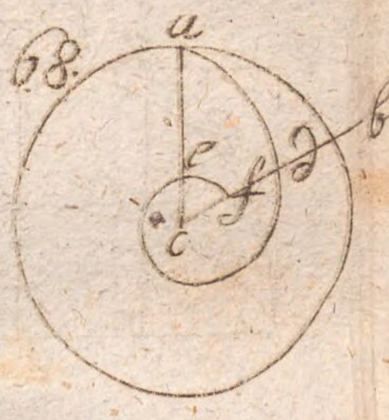
66.



67.

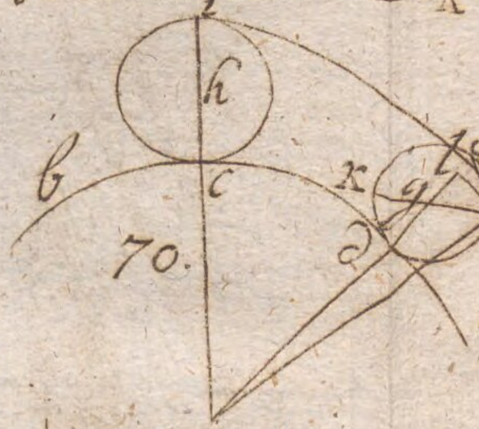


68.

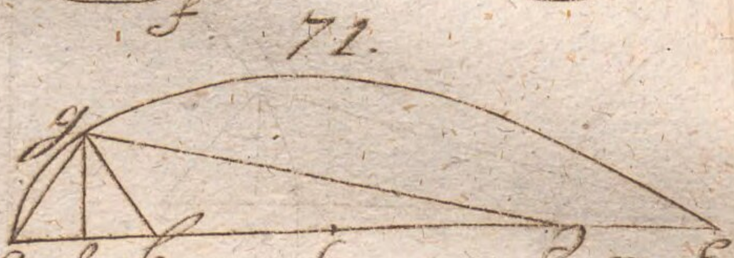


69.

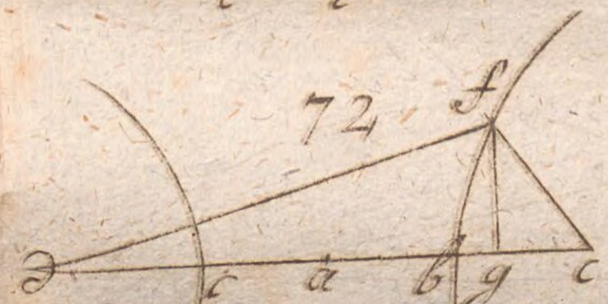
70.



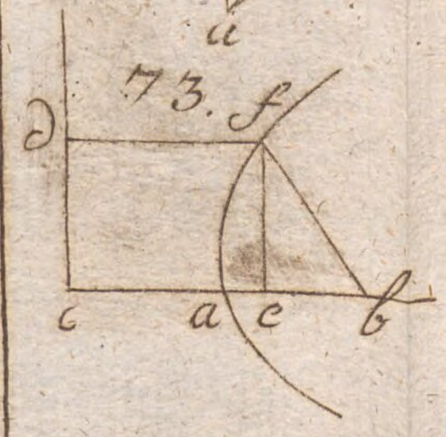
71.



72.



73.



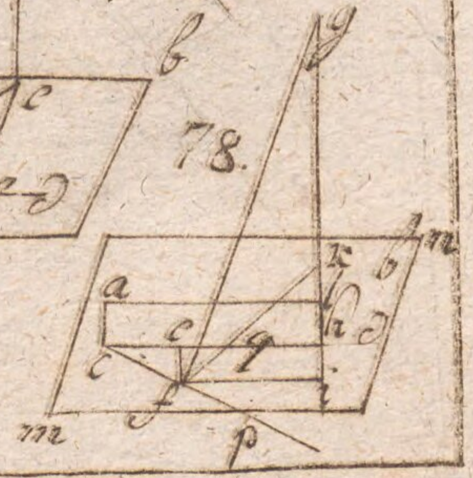
75.

76.

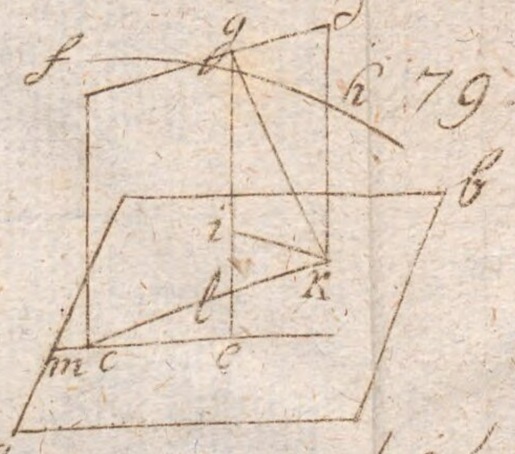
74.

77.

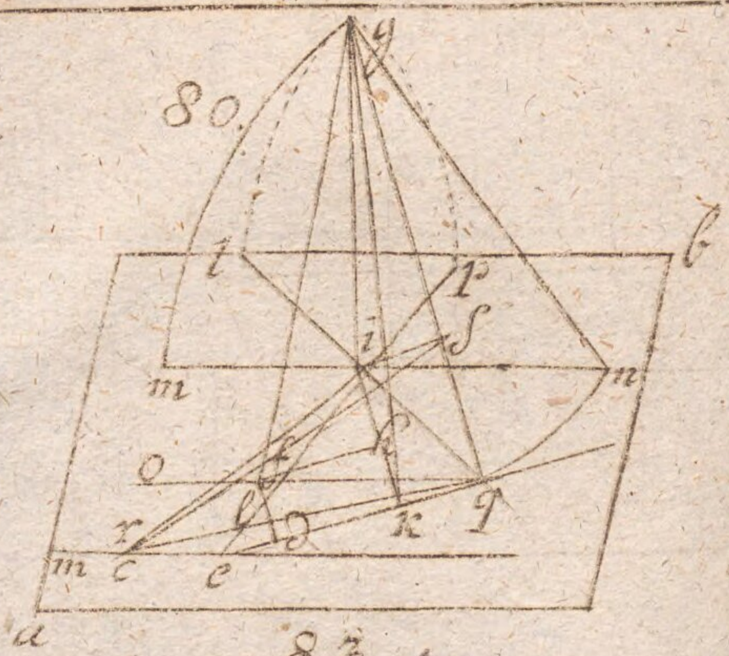
78.



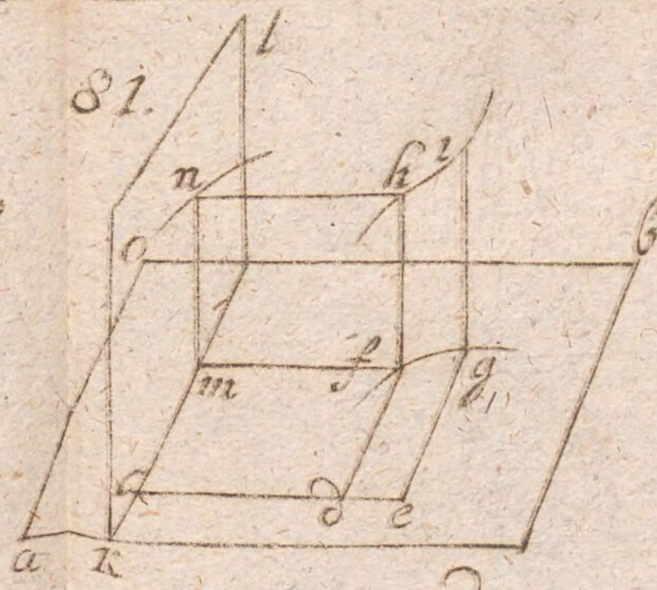
79.



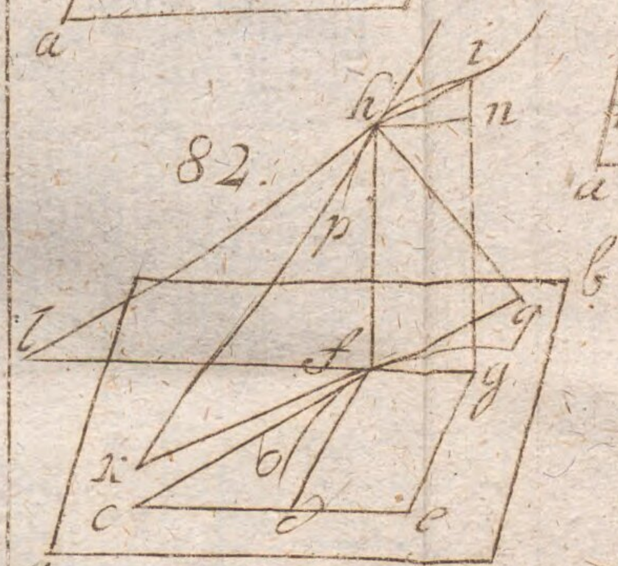
80.



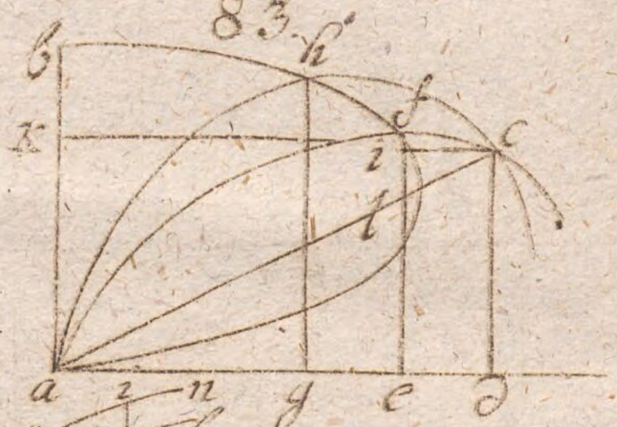
81.



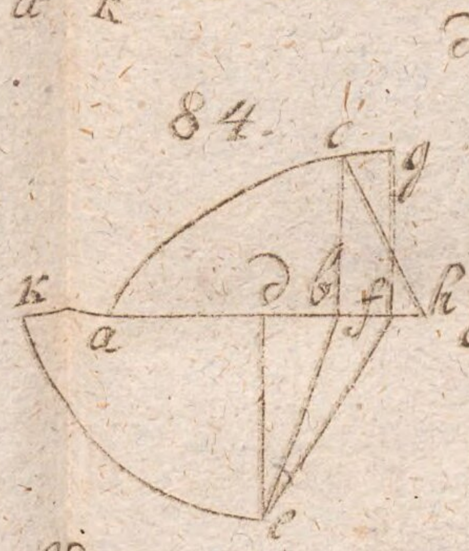
82.



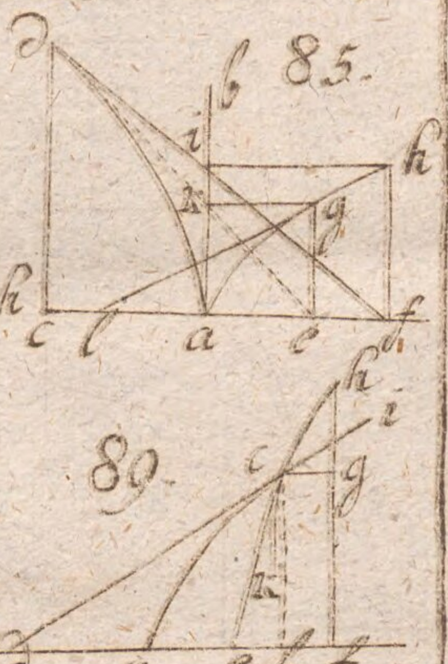
83.



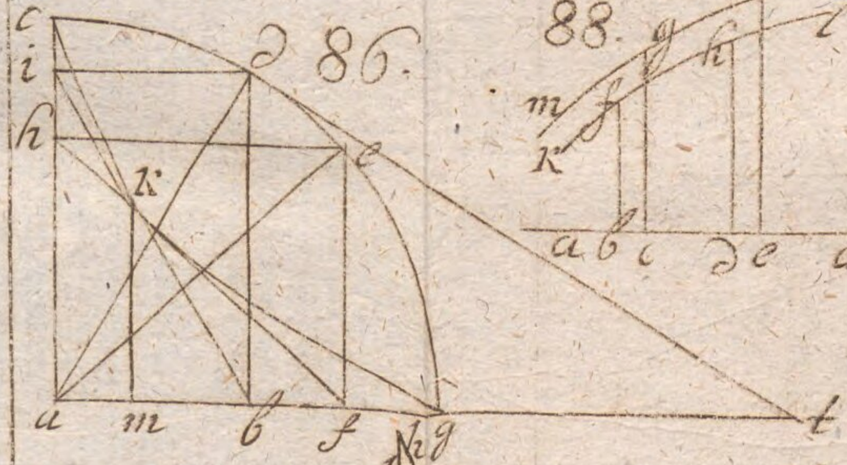
84.



85.

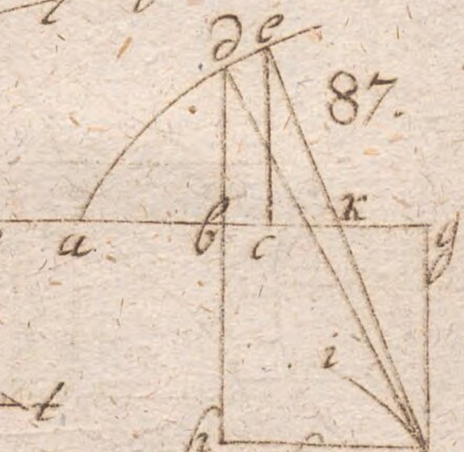


86.



88.

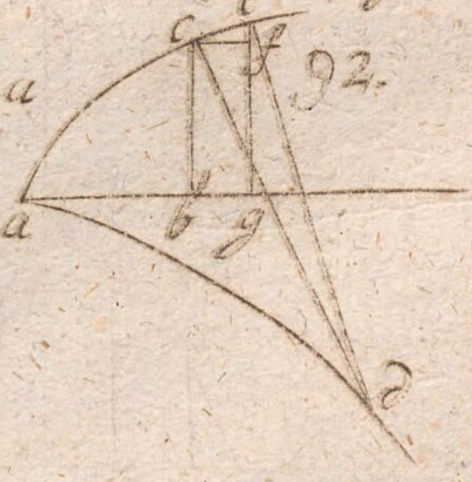
87.



90.

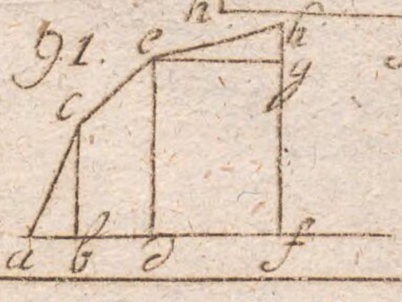
89.

92.



93.

91.



BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Fischer, Johann Carl,

Anfangsgründe der höhern Geometrie

Jena 1796
Math.p. 150
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10081784-2
VD18 14306956-002